УДК 517.97

Сергій Бак,
докт. фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Наталія Сомик,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Микола Куколевський,
студент факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА З НЕЛОКАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Анотація. *У статті одержано результат про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією на двовимірній ґратці. Для цього було використано метод критичних точок і метод періодичних апроксимацій.*

Ключові слова: *біжучі хвилі, система Фермі-Пасти-Улама, нелокальна взаємодія, критичні точки, періодичні апроксимації.*

Abstract. *The article provides a result on the existence of periodic and solitary traveling waves in the Fermi-Pasta-Ulam type system with nonlocal interaction on a two-dimensional lattice. For this, the method of critical points and the method of periodic approximations were used.*

Keywords: *traveling waves, Fermi-Pasta-Ulam system, nonlocal interaction, critical points, periodic approximations.*

Вступ. Особливу роль в нелінійній фізиці відіграють найпростіші «класичні» моделі, які включають в себе лише основні властивості системи, що розглядається, але при цьому дозволяють одержувати нові результати, які дають поштовх до подальшого розвитку науки. Однією із таких моделей, яка зіграла істотну роль у становленні сучасної нелінійної фізики, є запропонована в 50-х роках минулого століття одним із найвидатніших фізиків 20 століття Енріко Фермі найпростіша нелінійна модель ([9]), яка представляє собою аналог одновимірного кристалу, в якій враховується взаємодія тільки між сусідніми частинками. Ця модель, яка одержала назву ланцюга Фермі-Пасти-Улама, чисельно вивчалась на першому потужному комп'ютері MANIAC-I в Лос-Аламоській національній лабораторії (США) і привела до відкриття цілого ряду важливих особливостей поведінки нелінійних систем, виявленню нових динамічних об'єктів. У зв'язку з цим згадаємо відкриття так званих явищ «повернення» та «індукції», введення поняття солітона, відкриття повністю інтегровного ланцюга Тоди.

Останнім часом отримали розвиток різноманітні узагальнення одновимірної моделі Фермі-Пасти-Улама на двовимірні і тривимірні динамічні системи з дискретною симетрією. В якості одного з таких узагальнень можна відмітити двовимірну модель Батта-Ваттіса [7], яка знаходить застосування при розв'язуванні ряду задач твердотільної електроніки.

Однією з найбільш популярних моделей, близьких до двовимірної моделі Фермі-Пасти-Улама, є нескінченна система лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Важливим класом розв'язків таких систем є біжучі хвилі, серед яких особливе місце посідають відокремлені біжучі хвилі або солітони. Питання існування біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама та системах зв'язаних осциляторів вивчалося в працях [1-6, 8, 10-18].

Постановка задачі та основні припущення. Нехай $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ – координата (відхилення від положення рівноваги) (n, m)-ї частинки (атома) в момент часу t. Будемо вивчати двовимірну ґратку типу ФПУ з нелокальною взаємодією частинок, в якій кожна частинка взаємодіє з l сусідніми частинками по горизонталі і по вертикалі з кожного боку (тобто з $4l$ сусідами). Рівняння руху такої системи мають вигляд нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m} = \sum_{j=1}^{l}\Big[& W'_{1j}\left(q_{n+j,m}-q_{n,m}\right)-W'_{1j}\left(q_{n,m}-q_{n-j,m}\right)+ \\ & +W'_{2j}\left(q_{n,m+j}-q_{n,m}\right)-W'_{2j}\left(q_{n,m}-q_{n,m-j}\right)\Big],\ (n,\, m)\in\mathbb{Z},\end{aligned} \tag{1}$$

де $W_{ij}\in C^1\left(\mathbb{R};\,\mathbb{R}\right)$ – потенціали взаємодії частинок ($i=1,\,2,\; j=1,\,2,\dots,\,l$), причому W_{11} і W_{21} – потенціали взаємодії $(n,\, m)$-ї частинки з найближчими відповідно по горизонталі і по вертикалі сусідніми частинками, W_{12} і W_{22} – потенціали взаємодії $(n,\, m)$-ї частинки з наступними найближчими сусідніми частинками і т.д. Зауважимо, що система типу ФПУ з локальною взаємодією на двовимірній ґратці, вивчена, зокрема, в працях ([2-5]), є частковим випадком системи (1) при $l=1$.

Відповідно до поставлених завдань нашого дослідження будемо вивчати розв'язки у вигляді біжучих хвиль, які у двовимірному випадку мають вигляд

$$q_{n,m}(t)=u\left(n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct\right),\ (n,\, m)\in\mathbb{Z}^2. \tag{2}$$

Нагадаємо, що функція $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – називається *профільною функцією* або *профілем хвилі*, $\vec{l}\left(\cos\varphi,\,\sin\varphi\right)$ – фіксований *хвильовий вектор*, який визначає напрям поширення хвилі, а c – *швидкість хвилі*. Якщо $c>0$, то хвиля поширюється в одному напрямку, а якщо $c<0$, то – у протилежному.

Підставивши розв'язок (2) в рівняння (1) для профілю біжучої хвилі $u(s)$, де $s=n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct$, одержуємо рівняння

$$\begin{aligned}c^2u''(s)=\sum_{j=1}^{l}\Big[& W'_{1j}\left(u\left(s+j\cos\varphi\right)-u(s)\right)-W'_{1j}\left(u(s)-u\left(s-j\cos\varphi\right)\right)+ \\ & +W'_{2j}\left(u\left(s+j\sin\varphi\right)-u(s)\right)-W'_{2j}\left(u(s)-u\left(s-j\sin\varphi\right)\right)\Big],\end{aligned} \tag{3}$$

або

$$c^2 u''(s) = \sum_{j=1}^{l} \Big[W'_{1j}\big(A_j^+ u(s)\big) - W'_{1j}\big(A_j^- u(s)\big) + \\ + W'_{2j}\big(B_j^+ u(s)\big) - W'_{2j}\big(B_j^- u(s)\big)\Big], \tag{3'}$$

де

$$A_j^+ u(s) := u(s + j\cos\varphi) - u(s),\ \ A_j^- u(s) := u(s) - u(s - j\cos\varphi),$$

$$B_j^+ u(s) := u(s + j\sin\varphi) - u(s),\ \ B_j^- u(s) := u(s) - u(s - j\sin\varphi).$$

Під розв'язком рівняння (3) будемо розуміти таку функцію $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка при підстановці в це рівняння перетворює його на тотожність.

За виконання певних умов існують два типи розв'язків:

– періодичні біжучі хвилі, профілі яких задовольняють умову:

$$u'(s + 2k) = u'(s),\ \ s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $k > 0$ – деяке фіксоване число;

– відокремлені біжучі хвилі, профілі яких задовольняють умову:

$$\lim_{s\to-\infty} u'(s) = \lim_{s\to+\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \tag{5}$$

Варто зауважити, що профілі періодичних хвиль не обов'язково є періодичними, але періодичними є їх так звані профілі відносних зміщень, які виступають в ролі аргументів потенціалів W'_{ij} у рівнянні (3).

Всюди далі припускається, що виконуються такі умови:

(i) $W_{ij}(r) = \dfrac{c_{ij}^2}{2} r^2 + f_{ij}(r)$, *де* $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $f_{ij} \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *причому* $f_{ij}(0) = f'_{ij}(0) = 0$ *і* $f'_{ij}(r) = o(r)$ *при* $r \to 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, ..., l;$

(ii) *всі функції* $f_{ij}(r),\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, ..., l,$ *є невід'ємними та існує таке* l_0, *що*

$$\lim_{r\to\pm\infty} \frac{f_{il_0}(r)}{r^2} = +\infty.$$

Крім того, розглядаючи $2k$*-періодичну задачу з цілим періодом та*

$\varphi \equiv 0, \dfrac{\pi}{2} \mod \pi,$ *припустимо, що* $l_0 = 1.$

(iii) *всі функції* $\dfrac{f'_{ij}(r)}{|r|},\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, \ldots, l,$ *є неспадними та існує таке* $l_0,$ *що функції* $\dfrac{f'_{il_0}(r)}{|r|}$ *є строго зростаючими.*

У подальшому буде використана така величина:

$$c_0 = c_0(\varphi) := \sqrt{\sum_{j=1}^{l} \left(c_{1j}^2 \cos^2 \varphi + c_{2j}^2 \sin^2 \varphi \right) j^2},$$

яку будемо називати «*швидкістю звуку*» в даній моделі.

Варіаційне формулювання задачі. З задачами (3), (4) та (3), (5) пов'язуються відповідно два функціонали

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2} \left(u'(s) \right)^2 - \sum_{j=1}^{l} \left(W_{1j}\left(A_j^+ u(s) \right) + W_{2j}\left(B_j^+ u(s) \right) \right) \right] ds =$$

$$= \int_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2} \left(u'(s) \right)^2 - \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{c_{1j}^2}{2} \left(A_j^+ u(s) \right)^2 + \frac{c_{2j}^2}{2} \left(B_j^+ u(s) \right)^2 \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{l} \left(f_{1j}\left(A_j^+ u(s) \right) + f_{2j}\left(B_j^+ u(s) \right) \right) \right] ds$$

та

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2} \left(u'(s) \right)^2 - \sum_{j=1}^{l} \left(W_{1j}\left(A_j^+ u(s) \right) + W_{2j}\left(B_j^+ u(s) \right) \right) \right] ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2} \left(u'(s) \right)^2 - \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{c_{1j}^2}{2} \left(A_j^+ u(s) \right)^2 + \frac{c_{2j}^2}{2} \left(B_j^+ u(s) \right)^2 \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{l} \left(f_{1j}\left(A_j^+ u(s) \right) + f_{2j}\left(B_j^+ u(s) \right) \right) \right] ds,$$

визначені відповідно на гільбертових просторах

$$X_k := \left\{ u \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right):\ u'\left(s+2k\right) = u'\left(s\right),\, u\left(0\right) = 0 \right\}$$

та

$$X := \left\{ u \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right):\ u' \in L^2\left(\mathbb{R}\right),\, u\left(0\right) = 0 \right\}$$

відповідно зі скалярними добутками

$$\left(u,\, v\right)_k = \int_{-k}^{k} u'\left(s\right) v'\left(s\right) ds \text{ та } \left(u,\, v\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'\left(s\right) v'\left(s\right) ds\,.$$

Критичні точки функціоналу J_k є розв'язками задачі (3), (4), а критичні точки функціоналу J є розв'язками задачі (3), (5).

Таким чином, для доведення існування несталих розв'язків задач (3), (4) і (3), (5) достатньо довести існування нетривіальних критичних точок функціоналів J_k та J відповідно.

Основні результати. Наступні дві теореми, які встановлюють існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль з монотонними профілями, є основними результатами цієї статті.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $\left(i\right) - \left(iii\right)$, $c > c_0$, $T := 2k \ge l$ *та* $\varphi \in \left[\pi n,\, \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. *Тоді існує таке* $T_c \ge l$, *що для кожного нецілого періоду* $T \ge T_c$ *задача (3), (4) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки. Крім того, якщо* $l_0 = 1$ *в умові* $\left(ii\right)$, *то попереднє твердження правильне для всіх цілих* $T \ge T_c$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\left(i\right) - \left(iii\right)$, $c > c_0$ *та* $\varphi \in \left[\pi n,\, \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. *Тоді задача (3), (5) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки.*

Перша теорема доводиться за допомогою однієї з форм теореми про гірський перевал з умовою Серамі замість умови Пале-Смейла (див. [13]).

Оскільки відокремлені біжучі хвилі є в певному сенсі граничним випадком періодичних біжучих хвиль, коли період прямує до нескінченності, то вони будуються за допомогою методу періодичних апроксимацій, тобто за допомогою граничного переходу в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

Література:

1. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, № 4. P.509-520.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.
3. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 4 (January). P. 453-462.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 260, № 5 (February). P. 619-629.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, № 3 (February). P. 397-406.
6. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437-452.
7. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
8. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbor interactions. *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. P. 319-341.
9. Fermi E., Pasta J., Ulam S., Tsingou M. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept*. LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math*. 1974. Vol. 15. 156 p.
10. Friesecke G., Matthies K. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2003. Vol. 3, №1 (February). P. 105-114.
11. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys*. 2000. Vol. 211. P. 439-464.
12. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London – Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
13. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. Disr. Cont. Dyn. Syst. Ser. S. 2019. Vol. 12, № 7 (November). P. 2097–2113.
14. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam lattices with saturable nonlinearities. Discr. Cont. Dyn. Syst. 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835–840.
15. Smets D. Traveling waves for an infinite lattice: multibump type solutions. *Topol. Meth. Nonlin. Anal*. 1998. Vol. 12. P. 79-90.
16. Zhang L., Guo S. Existence and multiplicity of wave trains in 2D lattices. *J. Differential Equations*. 2014. Vol. 257. P. 759–783.
17. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
18. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.