В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко

Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад.

Алгебра

Навчально-методичний посібник

«Середняк Т.К.»
2015

УДК 512.1:372.851
ББК 22.141:74.262.21
Я 81

Рекомендовано до друку Вченою радою
Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
(протокол №4 від 24 вересня 2015 р.)

Рецензенти:

Працьовитий М. В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Матяш О. І., доктор педагогічних наук, професор кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Ясінський В. А.

Я81 Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко. — Вінниця : Середняк Т.К., 2015. — 272 с.
ISBN 978-617-7257-86-7

В посібнику описано вибрані методи розв'язування різних алгебраїчних задач олімпіадного характеру. Теоретичний матеріал доповнюється задачами математичних олімпіад, які представлено з повними розв'язаннями. Посібник призначений для вчителів математики, учнів загальноосвітніх шкіл, студентів педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всіх, хто цікавиться математикою.

УДК 512.1:372.851
ББК 22.141:74.262.21

ISBN 978-617-7257-86-7

Зміст

Передмова 5

Умовні позначення 6

Розділ 1. Деякі корисні рівності і тотожності, які використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач 7

1.1. Квадрат суми трьох обернених величин 7

1.2. Сума трьох кубів величин 10

1.3. Формула Абеля 13

Вправи для самостійного розв'язування 23

Розділ 2. Деякі новітні технології доведення нерівностей 24

2.1. Доведення нерівностей з використанням наслідків нерівності Коші–Буняковського–Шварца 24

2.2. Реверсна техніка Коші для доведення нерівностей 36

2.3. Трансферна нерівність та її застосування 41

2.4. Про новітні технології доведення симетричних нерівностей з трьома змінними 55

2.4.1. Нерівність Шура та її застосування 56

2.4.2. Нерівність Мюрхеда та її застосування 59

2.4.3. Метод різниць змінних 64

2.4.4. Симетрична кубічна нерівність та її застосування 68

2.5. Використання принципу Штурма при розв'язуванні олімпіадних екстремальних задач 72

Вправи для самостійного розв'язування 85

Розділ 3. Многочлени на математичних олімпіадах 90

3.1. Рівність і подільність многочленів 90

3.2. Формули Вієта 98

3.3. Незвідні многочлени 114

Вправи для самостійного розв'язування 118

Розділ 4. Числові послідовності на математичних олімпіадах 120

4.1. Знаходження загального члена послідовності 120

4.1.1. Використання методу математичної індукції для відшукання формули загального члена послідовності 124
4.1.2. Знаходження формули загального члена зворотних послідовностей 130
4.2. Послідовність Фібоначчі 141
4.3. Нерівності для послідовностей 151
Вправи для самостійного розв'язування 161

Розділ 5. Функціональні рівняння на математичних олімпіадах 163
5.1. Деякі теоретичні відомості про методи розв'язування функціональних рівнянь 163
5.2. Функціональні рівняння з натуральними і цілими змінними 166
5.3. Функціональні рівняння з дійсними змінними 181
5.4. Функціональні рівняння для многочленів 199
Вправи для самостійного розв'язування 202

Розділ 6. Практикум із розв'язування задач з алгебри, що пропонувалися на національних олімпіадах зарубіжних країн 204
Розв'язання задач 211

Література 270

Покажчик 271

Передмова

Олімпіадна математика з року в рік активно розвивається. З'являються нові тенденції, змінюються деякі традиції. Аналіз результатів математичних олімпіад України свідчить про об'єктивну потребу в удосконаленні методів навчання розв'язувати задачі високого рівня складності, зокрема й алгебраїчного характеру.

Автори цього навчально-методичного посібника ставили перед собою за мету розкрити кращі сучасні прийоми розв'язування олімпіадних задач. Саме цей посібник присвячено методам розв'язування алгебраїчних задач математичних олімпіад.

Посібник складається з шести розділів. Назви розділів відображають їх зміст:

- деякі корисні рівності і тотожності, які використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач;
- деякі новітні технології доведення нерівностей;
- многочлени на математичних олімпіадах;
- числові послідовності на математичних олімпіадах;
- функціональні рівняння на математичних олімпіадах;
- практикум із розв'язування задач з алгебри, що пропонувалися на національних олімпіадах зарубіжних країн.

Посібник безперечно буде корисним творчо працюючим вчителям математики, обдарованим учням загальноосвітніх шкіл та ліцеїв, студентам педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всім тим, хто цікавиться *математикою*.

Нагадуємо, що успіх на захоплюючому та тернистому шляху вивчення улюбленої науки супроводжує тих, хто не дозволяє задачам звалюватися на голову зненацька! ☺

Вересень 2015 року

В'ячеслав Ясінський
Олексій Панасенко

Умовні позначення

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел
$\mathbb{Q}$	множина раціональних чисел
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	$a_1 + a_2 + \ldots + a_k$
$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$
Нерівність AM-GM	нерівність Коші $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $a_1, \ldots, a_n > 0$
$\sum\limits_{cyc} P(x, y, z)$	$P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y)$
$\sum\limits_{sym} P(x, y, z)$	$P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(z, y, z)$
$\deg P(x)$	степінь многочлена $P(x)$
$\mathbb{Z}[x]$	множина многочленів однієї змінної з цілими коефіцієнтами
$\mathbb{Q}[x]$	множина многочленів однієї змінної з раціональними коефіцієнтами
$\mathbb{R}[x]$	множина многочленів однієї змінної з дійсними коефіцієнтами
$\mathbb{C}[x]$	множина многочленів однієї змінної з комплексними коефіцієнтами
(a_n) або $\{a_n\}$	числова послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
$\{F_n\}$	послідовність Фібоначчі
$\min\{a_1, \ldots, a_n\}$	найменше з чисел $a_1, \ldots, a_n$
$\max\{a_1, \ldots, a_n\}$	найбільше з чисел $a_1, \ldots, a_n$

Розділ 1

Деякі корисні рівності і тотожності, які використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач

При розв'язуванні різних олімпіадних задач, як і при їх створенні, корисними є різні алгебраїчні формули. Розглянемо деякі такі формули.

1.1. Квадрат суми трьох обернених величин

Розглянемо вираз $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ в області його визначення (a, b, c — дійсні числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$). Піднесемо його до квадрату:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}.$$

Якщо $a+b+c=0$, то одержимо

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

або

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|. \tag{1.1}$$

Якщо в (1.1) замість c підставити $-(a+b)$, то дістанемо:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|. \tag{1.2}$$

Якщо в (1.2) замість a підставити $\frac{1}{a}$, то дістанемо:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|. \tag{1.3}$$

Якщо в (1.2) замість a і b підставити $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$ відповідно, то дістанемо:

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}=\left|a+b-\frac{ab}{a+b}\right|. \tag{1.4}$$

А тепер розглянемо кілька задач, для розв'язання яких будуть застосовуватись формули (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).

Задача 1.1. *Довести, що коли a, b і c — різні раціональні числа, то число*

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$$

також раціональне.

Розв'язання. Оскільки $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, то застосовуючи (1.1) дістанемо:

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|,$$

що є раціональним числом при будь-яких попарно різних $a, b, c \in \mathbb{Q}$. □

Задача 1.2. *Не використовуючи таблиць і калькулятора, обчислити значення числового виразу*

$$\sqrt{1+2003^2+\frac{2003^2}{2004^2}}+\left(\frac{2004}{2003}\right)^{-1}.$$

Розв'язання. Перетворимо підкореневий вираз до такого вигляду:

$$A=\sqrt{1+2003^2+\frac{2003^2}{2004^2}}=\sqrt{2003^2+\frac{1}{1^2}+\frac{2003^2}{(2003\cdot 1+1)^2}}.$$

Застосуємо формулу (1.3), дістанемо:

$$A=2003+1-\frac{2003}{2004}.$$

Тому, значення заданого числового виразу буде рівним

$$A+\left(\frac{2004}{2003}\right)^{-1},$$

тобто

$$2003+1-\frac{2003}{2004}+\frac{2003}{2004}=2004.$$

□

Задача 1.3. *Не використовуючи таблиці і калькулятора, обчислити значення числового виразу*

$$\sqrt{0{,}43^2+0{,}57^2+0{,}43^2\cdot 0{,}57^2}.$$

Розв'язання. Перетворимо підкореневий вираз до такого вигляду:

$$\sqrt{0{,}43^2+0{,}57^2+0{,}43^2\cdot 0{,}57^2}=\sqrt{0{,}43^2+0{,}57^2+\frac{0{,}43^2\cdot 0{,}57^2}{(0{,}43+0{,}57)^2}}.$$

Далі, застосовуючи (1.4), дістанемо:

$$0{,}43+0{,}57-\frac{0{,}43\cdot 0{,}57}{(0{,}43+0{,}57)}=1-0{,}2451=0{,}7549.$$

□

Задача 1.4. *Довести, що при всіх цілих n число*

$$n^2+(n-1)^2+n^2(n-1)^2$$

є квадратом цілого числа і знайти це число.

Розв'язання. Дане число ми можемо подати у такому вигляді:

$$n^2+(n-1)^2+n^2(n-1)^2=n^2+(1-n)^2+\frac{n^2(1-n)^2}{(n+(1-n))^2}.$$

Далі, застосовуючи (1.4), дістанемо:

$$\left(n+(1-n)-\frac{n(1-n)}{n+(1-n)}\right)^2=(n^2-n+1)^2,$$

що і треба було довести. □

Задача 1.5. *Знайти всі дійсні корені рівняння*

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=120.$$

Розв'язання. Додамо до обох частин даного рівняння по 1, дістанемо рівносильне рівняння:

$$x^2+1+\frac{x^2}{(x+1)^2}=121$$

або

$$x^2+1^2+\frac{x^2}{(x\cdot 1+1)^2}=121.$$

Застосувавши формулу (1.3), дістанемо також рівносильне рівняння:

$$\left(x+1-\frac{x}{x+1}\right)^2=121,$$

або

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)^2=121.$$

Звідси одержуємо таку сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=-11,\\ \dfrac{x^2+x+1}{x+1}=11;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+x+1=-11(x+1),\\ x^2+x+1=11(x+1);\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+12x+12=0,\\ x^2-10x-10=0.\end{array}\right.$$

Розв'язавши ці квадратні рівняння, дістанемо:

$$x_{1,2}=-6\pm 2\sqrt{6}, x_{3,4}=5\pm\sqrt{35}.$$

Відповідь. $-6\pm 2\sqrt{6}$, $5\pm\sqrt{35}$. □

1.2. Сума трьох кубів величин

Розглянемо відому нам формулу для суми кубів двох величин:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab).$$

Узагальнимо її праву частину на випадок трьох величин:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Якщо розкрити дужки і звести подібні доданки, то одержимо:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \tag{1.5}$$

Якщо в (1.5) замість a, b, c підставити $b-c$, $c-a$, $a-b$ відповідно та врахувати, що $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$, то дістанемо

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0,$$

тобто

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a). \tag{1.6}$$

А тепер розглянемо декілька задач, для роз'язання яких будемо застосовувати формули (1.5), (1.6).

Задача 1.6. *Довести, що*

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)=$$
$$=2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right).$$

Розв'язання. Якщо в (1.5) замість a, b, c підставити $b+c$, $c+a$, $a+b$ відповідно, то дістанемо

$$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)=$$

$$
\begin{aligned}
&= ((b+c)+(c+a)+(a+b))\cdot\big((b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2-\\
&\quad -(b+c)(c+a)-(c+a)(a+b)-(a+b)(b+c)\big)=\\
&= 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\\
&= 2(a^3+b^3+c^3-3abc),
\end{aligned}
$$

тобто

$$
(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)= \\ = 2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right).
$$

□

Задача 1.7. *Довести, що якщо* $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$*, то*

$$(a+b+c)^3=27abc.$$

Розв'язання. Використовуючи (1.5), одержуємо:

$$a+b+c=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{c}\right)^3=3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$$

оскільки $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$. З того, що $a+b+c=3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$, одержуємо:

$$(a+b+c)^3=27abc.$$

□

Задача 1.8. *Довести, що рівняння*

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$$

не має розв'язків в цілих числах.

Розв'язання. Користуючись формулою (1.6), одержуємо:

$$3(x-y)(y-z)(z-x)=30,$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)=10.$$

Враховуючи, що $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$ і

$$10=1\cdot2\cdot5=(-1)\cdot(-2)\cdot5=(-1)\cdot2\cdot(-5)=1\cdot(-2)\cdot(-5),$$

одержуємо, що число 10 не подається у вигляді добутку трьох цілих чисел, сума яких дорівнює нулю:

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0.$$

Це і доводить, що дане рівняння не має розв'язків в цілих числах. □

Задача 1.9. *Розв'язати рівняння*

$$\left(x^2+3x-4\right)^3+\left(2x^2-5x+3\right)^3=\left(3x^2-2x-1\right)^3.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\left(x^2+3x-4\right)^3+\left(2x^2-5x+3\right)^3+\left(-3x^2+2x+1\right)^3=0$$

і помічаємо, що сума $\left(x^2+3x-4\right)+\left(2x^2-5x+3\right)+\left(-3x^2+2x+1\right)$ тотожно рівна нулю. Тому, застосовуючи формулу (1.5), одержуємо, що

$$3\left(x^2+3x-4\right)\left(2x^2-5x+3\right)\left(-3x^2+2x+1\right)=0.$$

Це рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x-4=0, \\ 2x^2-5x+3=0, \\ 3x^2-2x-1=0. \end{array}\right.$$

Розв'язавши її, знаходимо всі дійсні корені даного рівняння: $x_1=4$; $x_2=-\frac{1}{3}$; $x_3=1$; $x_4=\frac{3}{2}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3},1,\frac{3}{2},4.$ □

Задача 1.10. *Нехай x, y, z — дійсні числа. Довести, що виконується нерівність*

$$\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)^2\leqslant\left(x^2+y^2+z^2\right)^3.$$

Розв'язання. Введемо такі позначення:

$$\alpha=x^2+y^2+z^2=\sum_{cyc}x^2,$$

$$\beta=xy+yz+zx=\sum_{cyc}xy,$$

$$\gamma=x^3+y^3+z^3-3xyz=\sum_{cyc}x^3-\sum_{cyc}xyz.$$

Оскільки має місце такі нерівності $\alpha\geqslant 0$, $\alpha\geqslant\beta$ і за формулою (1.5)

$$\gamma=\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\sum_{cyc}x^2-\sum_{cyc}xy\right),$$

то

$$\gamma^2=\left(\sum_{cyc}x\right)^2\left(\sum_{cyc}x^2-\sum_{cyc}xy\right)^2=$$

$$= \left(\sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc} xy\right)\left(\sum_{cyc} x^2 - \sum_{cyc} xy\right)^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)^2$$

і

$$\alpha^3 - \gamma^2 = \alpha^3 - (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)^2 = \alpha^3 - \left(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + 2\beta^3\right) = \\ = \beta^2 (2(\alpha - \beta) + \alpha) \geqslant 0.$$

Отже, $\gamma^2 \leqslant \alpha^3$, що і треба було довести. □

Отже, формули (1.5), (1.6) достатньо часто застосовують при розв'язуванні задач. В цій книжці вони використовуються також при розв'язуванні задач 3.12, 3.17, 4.25.

1.3. Формула Абеля

Розглянемо ще одну цікаву формулу, яку називають *формулою Абеля*[1].

Для будь-якого цілого $n > 0$ і двох наборів дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ має місце така рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n,$$

де $A_k = a_1 + \ldots + a_k$.

В розгорнутому вигляді вона записується так

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \\ = a_1 (b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)\big(b_3 - b_4\big) + \ldots + \\ + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) b_n. \quad (1.7)$$

Доводиться ця формула простим розкриттям дужок. Дійсно,

$$a_1 (b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)\big(b_3 - b_4\big) + \ldots + \\ + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) b_n = \\ = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \ldots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n = \\ = A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + \ldots + (A_n - A_{n-1}) b_n = \\ = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$

що і треба було довести.

---

[1] *Нільс Генрік Абель* (Niels Henrik Abel, 1802–1829) — норвезький математик.

Застосовують цю формулу, як правило, при доведенні нерівностей. Продемонструємо це на деяких задачах.

Задача 1.11. *Якщо x, y, z — будь-які дійсні числа, то виконується така нерівність*

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geqslant 2\left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right).$$

Розв'язання. Оскільки

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \leqslant |x|^3|y|^3 + |y|^3|z|^3 + |z|^3|x|^3,$$

то будемо доводити дану нерівність за умови, що $x, y, z \geqslant 0$.

Скористаємось так званою **нерівністю Абеля**: якщо $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant 0$ і $b_1 \geqslant 0$, $b_1 + b_2 \geqslant 0$, $b_1 + b_2 + b_3 \geqslant 0$, то виконується така нерівність $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geqslant 0$.

Дійсно, справедливість цього твердження випливає із формули Абеля:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1(a_1 - a_2) + (b_1 + b_2)(a_2 - a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)a_3 \geqslant 0,$$

бо за умовою всі множники невід'ємні.

Не порушуючи загальності, припустимо, що $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Покладемо $a_1 = x^2, a_2 = y^2, a_3 = z^2$ і $b_1 = x^4 - (y^3 + z^3)x + y^2z^2$, $b_2 = y^4 - (x^3 + z^3)y + x^2z^2$, $b_3 = z^4 - (x^3 + y^3)z + x^2y^2$.

Доведемо, що $b_1 \geqslant 0$, $b_1 + b_2 \geqslant 0$ і $b_1 + b_2 + b_3 \geqslant 0$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} b_1 &= x^4 - (y^3 + z^3)x + y^2z^2 \geqslant x^4 - xy^3 - xz^3 + yz^3 = \\ &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 - z^3) \geqslant 0, \end{aligned}$$

оскільки $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$;

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= x^4 + y^4 - z^3(x + y) - xy(x^2 + y^2) + z^2(x^2 + y^2) = \\ &= x^3(x - y) - y^3(x - y) + z^2(x^2 - xz + y^2 - yz) = \\ &= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) + z^2\left(x(x - z) + y(y - z)\right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= x^4 + y^4 + z^4 - x^3(y + z) - y^3(z + x) - z^3(x + y) + \\ &\qquad + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \\ &= \frac{1}{4}x^2(2x - y - z)^2 + \frac{1}{4}y^2(2y - z - x)^2 + \frac{1}{4}z^2(2z - x - y)^2 + \\ &+ \frac{1}{4}(xy - yz)^2 + \frac{1}{4}(yz - zx)^2 + \frac{1}{4}(zx - xy)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Оскільки $b_1 \geqslant 0$, $b_1 + b_2 \geqslant 0$ і $b_1 + b_2 + b_3 \geqslant 0$, то за нерівністю Абеля виконується й така нерівність $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \geqslant 0$, що і треба було довести. □

Задача 1.12. *Нехай $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ і B — найбільше із чисел $|b_1|$, $|b_1 + b_2|, \ldots, |b_1 + b_2 + \ldots + b_n|$. Доведіть, що*

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| \leqslant B a_1.$$

(Санкт-Петербургська математична олімпіада, 1967 р.)

Розв'язання. Скористаємось формулою Абеля:

$$\begin{gathered}
|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| = \\
|b_1 (a_1 - a_2) + (b_1 + b_2)(a_2 - a_3) + \ldots + \\
+ (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})(a_{n-1} - a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) a_n| \leqslant \\
\leqslant |b_1| (a_1 - a_2) + |b_1 + b_2| (a_2 - a_3) + \ldots + \\
+ |b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}| (a_{n-1} - a_n) + |b_1 + b_2 + \ldots + b_n| a_n \leqslant \\
\leqslant B((a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + a_n) = B a_1,
\end{gathered}$$

що і треба було довести. □

Задача 1.13. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \geqslant 0$ – дійсні числа. Для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ позначимо $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i$. Нехай $M = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ і $m = \min\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Доведіть, що*

$$m y_1 \leqslant x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \leqslant M y_1.$$

(Нерівність Абеля)

Розв'язання. Оскільки обидві нерівності можна довести аналогічно, достатньо показати доведення лівої нерівності. Нехай $a_{n+1} = 0$, тоді за формулою Абеля, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=`}^{n} (y_i - y_{i+1}) S_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m (y_i - y_{i+1}) = m (y_1 - y_{n+1}) = m y_1.$$

Нерівності, які доводяться за допомогою формули Абеля, часто з'являються на різних математичних змаганнях. Однак їх важко розв'язати іншими методами. Ось деякі з них. □

Задача 1.14. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такі додатні дійсні числа, що*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant \sqrt{k}$$

для всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доведіть нерівність:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

(США, 1994 р.)

Розв'язання. Не порушуючи загальності припустимо, що $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Позначимо $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ для $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведемо такі дві нерівності, з яких і випливатиме твердження задачі:

$$2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n; \tag{1.8}$$

$$2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right) \geqslant b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2. \tag{1.9}$$

Доведемо нерівність (1.8). Для цього складемо різницю між лівою і правою частинами і скористаємось формулою Абеля:

$$\begin{gathered} a_1(2a_1 - b_1) + a_2(2a_2 - b_2) + \ldots + a_n(2a_n - b_n) = \\ (a_1 - a_2)(2a_1 - b_1) + (a_2 - a_3)(2a_1 + 2a_2 - b_1 - b_2) + \ldots + \\ +(a_{n-1} - a_n)\left(2\sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right). \end{gathered}$$

Покажемо невід'ємність виразу у правій частині останньої рівності. За умовою задачі $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sqrt{k}$, в той час як

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{\sqrt{i} + \sqrt{i-1}} = 2\sum_{i=1}^{k}\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right) = 2\sqrt{k}.$$

Тоді

$$2\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i \tag{1.10}$$

для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Також за припущенням $a_k \geqslant a_{k+1}$ для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $a_n > 0$ за умовою. Отже, нерівність (1.8) доведена.

Тепер доведемо нерівність (1.9). Складемо різницю між лівою і правою частинами цієї нерівності і скористаємось формулою Абеля:

$$\begin{gathered} b_1(2a_1 - b_1) + b_2(2a_2 - b_2) + \ldots + b_n(2a_n - b_n) = \\ (b_1 - b_2)(2a_1 - b_1) + (b_2 - b_3)(2a_1 + 2a_2 - b_1 - b_2) + \ldots + \\ +(b_{n-1} - b_n)\left(2\sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + b_n\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right). \end{gathered}$$

Враховуючи доведену вище рівність (1.10), а також те, що $b_k \geqslant b_{k+1}$ для всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $b_n > 0$, отримуємо, що нерівність (1.9) є правильною. □

Задача 1.15. *Нехай* a_1, a_2, $\ldots$, a_n *і* $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ *додатні дійсні числа, для яких виконуються нерівності* $a_1a_2\ldots a_k \geqslant b_1b_2\ldots b_k$*, для всіх* $k = 1, 2, \ldots, n$*. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Розв'язання. За *формулою Абеля*, одержуємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{a_i}{b_i} - 1\right) =$$
$$= (b_1 - b_2)\left(\frac{a_1}{b_1} - 1\right) + (b_2 - b_3)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - 2\right) + \ldots +$$
$$+ (b_{n-1} - b_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{b_i} - (n-1)\right) + b_n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} - n\right) \geqslant 0,$$

бо, враховуючи умову $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, одержуємо невід'ємність перших множників, а враховуючи умову $a_1a_2\ldots a_k \geqslant b_1b_2\ldots b_k$, для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$, і нерівність Коші (AM-GM)

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_k}{b_k} \geqslant k\sqrt[k]{\frac{a_1a_2\ldots a_k}{b_1b_2\ldots b_k}} \geqslant k,$$

для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$, одержуємо невід'ємність других множників, що і завершує розв'язання задачі. $\square$

Задача 1.16. *Нехай* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *і* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *— дійсні числа, такі, що*

$$a_1 \geqslant \frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
$$b_1 \geqslant \frac{b_1 + b_2}{2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Доведіть, що виконується нерівність

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

(Польща, 1964 р.)

Розв'язання. Це *покращена нерівність Чебишова*. Для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, позначимо через $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ і $b_{n+1} = 0$. Тоді, за *формулою Абеля*, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1})S_i = \sum_{i=1}^{n} i\,(b_i - b_{i+1})\left(\frac{S_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_id_i,$$

де $c_i = i\,(b_i - b_{i+1})$, $d_i = \frac{S_i}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. До суми $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i d_i$ знову застосуємо формулу Абеля:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i d_i = c_1\,(d_1 - d_2) + (c_1 + c_2)\,(d_2 - d_3) + (c_1 + c_2 + c_3)\big(d_3 - d_4\big) + \ldots +$$
$$+ (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1})\,(d_{n-1} - d_n) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\,d_n =$$
$$= (b_1 - b_2)\left(\frac{S_1}{1} - \frac{S_2}{2}\right) + (b_1 + b_2 - 2b_3)\left(\frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3}\right) +$$
$$+ \big(b_1 + b_2 + b_3 - 3b_4\big)\left(\frac{S_3}{3} - \frac{S_4}{4}\right) + \ldots + (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} - (n-1)\,b_{n-1}) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} - \frac{S_n}{n}\right) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\,\frac{S_n}{n}.$$

Оскільки $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, то останній доданок одержаної суми дорівнює $\frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, а всі інші доданки одержаної суми — невід'ємні. Дійсно, за умовою задачі $\frac{S_1}{1} \geqslant \frac{S_2}{2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{S_n}{n}$, тому усі множники $\frac{S_1}{1} - \frac{S_2}{2}$, $\frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3}$, $\ldots$, $\frac{S_{n-1}}{n-1} - \frac{S_n}{n}$ — невід'ємні. Залишилося довести, що

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \geqslant k b_{k+1},$$

для всіх $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Справедливість цієї нерівності випливає, з умови задачі:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} b_i \geqslant \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} b_i,$$

що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 1.17. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — дійсні числа, для яких виконується умова: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} = 0$. Доведіть, що виконується нерівність*

$$\sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\,\big(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}\big).$$

Розв'язання. Позначимо $a_i = \sqrt{i} - \sqrt{i-1}$ і $b_i = \sqrt{x_i}$, де $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, тоді за *формулою Абеля*, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1\,(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)\,(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)\big(b_3 - b_4\big) + \ldots +$$
$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})\,(b_{n-1} - b_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,b_n =$$

$$= \sqrt{1}\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}\right) + \sqrt{3}\left(\sqrt{x_3} - \sqrt{x_4}\right) + \ldots +$$
$$+ \sqrt{n-1}\left(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{x_n}\right) + \sqrt{n}\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_{n+1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}\right).$$

Отже, нам треба довести нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

тобто

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Нехай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такі додатні дійсні числа, що $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i c_i\right)^2$. Це можливо, коли набори чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ і $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — пропорційні, тобто $c_i = \frac{b_i}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}$, для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді остання нерівність перепишеться так

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_n c_n.$$

Щоб довести цю нерівність, перепишемо її у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (a_i - c_i) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i d_i \geqslant 0,$$

де $d_i = a_i - c_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Для доведення останньої нерівності, запишемо *формулу Абеля* для суми $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i b_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i b_i = d_1 (b_1 - b_2) + (d_1 + d_2)(b_2 - b_3) + (d_1 + d_2 + d_3)\left(b_3 - b_4\right) + \ldots +$$
$$+ (d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1})(b_{n-1} - b_n) + (d_1 + d_2 + \ldots + d_n)\, b_n =$$
$$= (a_1 - c_1)(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2 - c_1 - c_2)(b_2 - b_3) +$$
$$+ (a_1 + a_2 + a_3 - c_1 - c_2 - c_3)\left(b_3 - b_4\right) + \ldots +$$
$$+ (a_1 + \ldots + a_{n-1} - c_1 - \ldots - c_{n-1})(b_{n-1} - b_n) +$$
$$+ (a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n - c_1 - \ldots - c_{n-1} - c_n)\, b_n \geqslant 0,$$

бо перші дужки кожного доданку — невід'ємні, другі дужки — також. Дійсно, для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k} c_i = \sqrt{k} - \sum_{i=1}^{k} c_i \geqslant \sqrt{k} - \sqrt{k\left(\sum_{i=1}^{k} c_i^2\right)} = 0.$$

Тут ми скористалися нерівністю між середнім квадратичним і середнім арифметичним k додатних чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Невід'ємність других дужок випливає з того, що $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} = 0$, бо за умовою задачі $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} = 0$, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 1.18. *Нехай* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *і* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *два набори дійсних чисел, для яких виконуються умови* $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ *і* $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 \leqslant b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2$, *для всіх* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Доведіть, що*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Розв'язання. Будемо доводити твердження задачі методом математичної індукції. *База індукції.* Випадок $n = 1$ є очевидним. Дійсно, маємо, що $0 \leqslant b_1$ і $a_1^2 \leqslant b_1^2$. Звідки слідує, що $-b_1 \leqslant a_1 \leqslant b_1$. *Крок індукції.* Припустимо, що твердження задачі виконується для деякого натурального числа n. Доведемо, використовуючи це припущення, що тоді твердження задачі буде виконуватися і для числа $n + 1$. Дійсно, використовуючи нерівність Коші–Буняковського–Шварца, матимемо:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n+1}^2\right) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{n+1} b_{n+1})^2.$$

За припущенням маємо, що $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i^2$, тому з попередньої нерівності одержуємо: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i^2\right)^2 \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i b_i\right)^2$, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i^2 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i b_i$. Звідси $\sum\limits_{i=1}^{n+1} b_i (b_i - a_i) \geqslant 0$, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n+1} c_i b_i \geqslant 0$, де $c_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n, n + 1$. Скористаємося *формулою Абеля* в цій нерівності, одержимо:

$$\begin{gathered} c_1 (b_1 - b_2) + (c_1 + c_2)(b_2 - b_3) + (c_1 + c_2 + c_3)\left(b_3 - b_4\right) + \ldots + \\ + (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)(b_n - b_{n+1}) + (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1})\, b_{n+1} \geqslant 0, \end{gathered}$$

тобто

$$\begin{gathered} (b_1 - a_1)(b_1 - b_2) + (b_1 + b_2 - a_1 - a_2)(b_2 - b_3) + \\ (b_1 + b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3)\left(b_3 - b_4\right) + \ldots + \\ + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=i}^{n} a_i\right)(b_n - b_{n+1}) + \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i - \sum_{i=i}^{n+1} a_i\right) b_{n+1} \geqslant 0. \end{gathered}$$

У цій останній нерівності кожний доданок, крім останнього, не є додатний. Це випливає з того, що перші множники кожного такого доданку, за припущенням, невід'ємні, бо $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, для кожного $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, а другі не є додатні, бо за умовою задачі $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Тому, із цієї нерівності одержуємо, що

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) b_{n+1} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1} b_i \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} a_i,$$

що і завершує доведення кроку. Таким чином, за основним принципом математичної індукції, одержуємо, що твердження задачі має місце для будь-якого натурального n, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 1.19. *Нехай* $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ *і*

$$x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Доведіть, що коли $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, *то*

$$x_1^{13} y_1 + x_2^{13} y_2 + \ldots + x_n^{13} y_n < x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

(Росія, 2000 р.)

Розв'язання. Не порушуючи загальності можна вважати, що $y_1 > 0$, бо

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i + c)\left(x_i^{13} - x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_i^{13} - x_i\right) + c\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{13} - x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_i^{13} - x_i\right).$$

Відповідно до *формули Абеля*, одержуємо, що різниця між лівою і правою частинами доводжуваної нерівності дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{13} - x_i\right) y_i = \left(x_1^{13} - x_1\right)(y_1 - y_2) + \left(x_1^{13} + x_2^{13} - x_1 - x_2\right)(y_2 - y_3) + \ldots +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^{13} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)(y_{n-1} - y_n) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{13} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) y_n.$$

Оскільки $y_k \leqslant y_{k+1}$, для усіх $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, і $y_n > 0$, то нам потрібно довести, що, для усіх $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, виконується нерівність:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{13} \geqslant \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i \left(x_i^{12} - 1\right) \geqslant 0.$$

Застосовуючи формулу Абеля до лівої частини останньої нерівності, матимемо:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(x_i^{12} - 1\right) x_i = (x_1 - x_2)\left(x_1^{12} - 1\right) + (x_2 - x_3)\left(x_1^{12} + x_2^{12} - 2\right) + \ldots +$$

$$+(x_{k-1}-x_k)\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i^{12}-(k-1)\right)+x_k\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^{12}-k\right).$$

Відмітимо, що $x_i \in [-1,\ 1]$, для всіх $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, а тому $\sum\limits_{i=1}^{j} x_i^{12} \leqslant j$, для всіх $j \in \{1,2,\ldots,k\}$. Крім того, через $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, кожен член в сумі вище, за винятком останнього, буде додатнім, як добуток двох від'ємних чисел. Якщо $x_k \leqslant 0$, то $x_k\left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^{12}-k\right) \geqslant 0$, як добуток двох не додатних чисел. А тому у цьому випадку ми нерівність $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\left(x_i^{12}-1\right) \geqslant 0$ довели. В іншому випадку, припустимо, що $x_k > 0$, тоді $x_i > 0$,для всіх $i \in \{k+1,\ldots,n\}$. Звідси випливає, за припущенням, що

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i^{13} \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} x_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^{13} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 1.20. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — два набори дійсних чисел, для яких виконуються умови $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ і $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 \leqslant b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2$, для всіх $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Доведіть, що*

$$b_1+b_2+\ldots+b_n \geqslant \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}.$$

Розв'язання. Щоб довести потрібну нерівність, розглянемо різницю між її лівою і правою частинами, і доведемо, що вона невід'ємна.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\frac{a_i^2}{b_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\left(b_i^2-a_i^2\right).$$

Застосуємо *формулу Абеля* до останньої суми:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\left(b_i^2-a_i^2\right)=\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)\left(b_1^2-a_1^2\right)+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)\left(b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2-\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)+\frac{1}{b_n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2-\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \geqslant 0,$$

бо при $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ перші множники доданків — невід'ємні:

$$\frac{1}{b_i}-\frac{1}{b_{i+1}}=\frac{b_{i+1}-b_i}{b_i b_{i+1}} \geqslant 0,$$

при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, і $\frac{1}{b_n} > 0$, а другі множники доданків, за умовою, невід'ємні: $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 \leqslant b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2$, для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$. Це і завершує розв'язання задачі. □

Вправи для самостійного розв'язування

Вправа 1. *Довести, що для довільних цілих x та y число*

$$\left(x^2y^2+1\right)(xy+1)^2 + x^2y^2$$

є квадратом цілого числа.

Вправа 2. *Обчислити значення числового виразу*

$$\sqrt{0{,}\underbrace{99\ldots9}_{n}{}^2 + \underbrace{99\ldots9}_{n}{}^2 + 1}.$$

Вправа 3. *Довести, що*

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Вправа 4. *Довести, що коли $a+b+c=0$, то*

$$\left(a^2-bc\right)^3 + \left(b^2-ca\right)^3 + \left(c^2-ab\right)^3 = 3\left(a^2-bc\right)\left(b^2-ca\right)\left(c^2-ab\right).$$

Вправа 5. *Довести, що коли трицифрове число ділиться на 3, то і сума кубів його цифр ділиться на 3.*

Вправа 6. *Розв'язати рівняння в цілих числах: $x^3 + y^3 - 3xy = 3$.*

Вказівка. Подайте рівняння у вигляді: $x^3 + y^3 + 1^3 - 3xy \cdot 1 = 4$.

Вправа 7. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x + y + z = 2004, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2004^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2004^3. \end{cases}$$

Вправа 8. *Довести, що*

$$(a+b+c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$$

ділиться на

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3,$$

де a, b, c — цілі числа, для яких $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \neq 0$.

Деякі новітні технології доведення нерівностей

2.1. Доведення нерівностей з використанням наслідків нерівності Коші–Буняковського–Шварца

При доведенні числових нерівностей, зокрема циклічних, досить поширеним і ефективним є звертання до класичних нерівностей. Однією з найуживаніших у використанні є нерівність Коші–Буняковського–Шварца[1] (у вітчизняній літературі більш поширеною є назва «нерівність Коші–Буняковського», а в англомовних джерелах — «нерівність Коші–Шварца»):

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots. + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots. + b_n^2\right), \quad (2.1)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — довільні дійсні числа.

Нерівність Коші–Буняковського–Шварца записують також у векторній формі

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \leqslant |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2,$$

яка є зручною для запам'ятовування. Остання нерівність перетворюється в рівність, коли вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ є колінеарними. Тому рівності

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

є умовою перетворення нерівності Коші–Буняковського–Шварца, записаній у координатній формі (2.1), у рівність.

На практиці, як правило, завдання, що пропонуються, не дозволяють безпосередньо використати нерівність Коші–Буняковського–Шварца. Потрібна певна підготовча робота. Успіх тут перш за все залежить від вдалого вибору векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто від вдалого вибору двох певних наборів, кожен з яких містить n чисел. Це вимагає подолання значних логічних та технічних труднощів. З огляду на суворі обмеження в часі на математичних змаганнях відшукати такі набори дуже складно.

[1] *Огюстен Луї Коші* (1789–1857) — французький математик; *Віктор Якович Буняковський* (1804–1889) — математик українського походження (народився на Вінниччині); *Карл Герман Амандус Шварц* (1843–1921) — німецький математик.

В цьому параграфі пропонується підхід, який ґрунтується на використанні, як допоміжної, певної нерівності, котру можна розглядати як аналог нерівності Коші–Буняковського–Шварца. Проте перетворення, які виконуються з метою підготовки завдання до застосування цієї допоміжної нерівності в багатьох випадках виглядають більш природними і привабливими, ніж пошук двох необхідних впорядкованих наборів для прямого використання нерівності Коші–Буняковського–Шварца.

Лема 2.1. *Для будь-яких двох додатних чисел , b виконується нерівність:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}. \tag{2.2}$$

Доведення. Справді,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b} \quad\Leftrightarrow\quad (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4 \quad\Leftrightarrow\quad (a-b)^2\geqslant 0.$$

□

Задача 2.1. *Доведіть нерівність:*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right),$$

де x, y, z — довільні додатні дійсні числа.

Розв'язання. На підставі нерівності (2.2) маємо

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y},\quad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{z+y},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{4}{x+z}.$$

Додавши почленно останні три нерівності дістанемо нерівність, про яку йдеться в умові. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $x=y=z$. □

Задача 2.2. *Нехай a, b, c, d — такі дійсні додатні числа, що $abcd=1$. Доведіть нерівність*

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geqslant 4.$$

(V Соросівська математична олімпіада, 1999 р.)

Розв'язання. Маємо $cd=\frac{1}{ab}$, $ad=\frac{1}{bc}$. Позначимо ліву частину нерівності через A. Тоді

$$A=(1+ab)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right).$$

Використовуючи нерівність (2.2), дістанемо

$$A\geqslant(1+ab)\,\frac{4}{1+a+ab+abc}+(1+bc)\,\frac{4}{1+b+bc+bcd}=$$

$$=4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\right)=$$
$$=4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+\frac{a+abc}{a+ab+abc+abcd}\right)=4,$$

оскільки $abcd=1$. □

Узагальненням леми 2.1 є такі два твердження.

Лема 2.2. *Нехай b_1 і b_2 — додатні дійсні числа, a_1 і a_2 — довільні дійсні числа. Тоді правильною є нерівність*

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}\geqslant\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2} \tag{2.3}$$

Доведення. Справді,

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}-\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}=\frac{a_1{}^2b_2(b_1+b_2)+a_2{}^2b_1(b_1+b_2)-(a_1+a_2)^2b_1b_2}{b_1b_2(b_1+b_2)}=$$
$$=\frac{a_1{}^2b_2b_1+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1b_2+a_2{}^2b_1{}^2-a_1{}^2b_1b_2-a_2{}^2b_1b_2-2a_1a_2b_1b_2}{b_1b_2(b_1+b_2)}=$$
$$=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{b_1b_2(b_1+b_2)}\geqslant 0,$$

що і треба було довести. □

Лема 2.3. *Нехай натуральне число $n\geqslant 2$. Тоді для додатних чисел $b_1,b_2,\ldots,b_n$ виконується нерівність*

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n{}^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \tag{2.4}$$

де $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — довільні дійсні числа.

Доведення. Зробимо це за індукцією. При $n=2$ твердження є правильним. Нехай нерівність (2.4) виконується для деякого довільного, але фіксованого $k>2$. Доведемо, що вона виконується і для $n=k+1$. Справді, посилаючись на гіпотезу індукції та нерівність (2.3), дістанемо

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_k{}^2}{b_k}+\frac{a_{k+1}{}^2}{b_{k+1}}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_k}+\frac{a_{k+1}{}^2}{b_{k+1}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1})^2}{b_1+b_2+\ldots+b_{k+1}},$$

що і завершує крок індукції. □

Зауважимо, що нерівність (2.4) можна також довести, використовуючи нерівність Коші–Буняковського–Шварца, для наборів $\left(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}\right)$ і $\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$. Справді,

$$\left(\left(\sqrt{b_1}\right)^2 + \left(\sqrt{b_2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{b_n}\right)^2\right)\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\sqrt{b_1} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} + \sqrt{b_2} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} + \ldots + \sqrt{b_n} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2$$

для будь-яких дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і $b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_n > 0$.

З іншого боку, навпаки, і нерівність Коші–Буняковського–Шварца (2.1) можна довести, виходячи з нерівності (2.4). Справді, розглянемо очевидну рівність

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \ldots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2}$$

і застосуємо до її правої частини нерівність (2.4):

$$\frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \ldots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2} \geqslant \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Тоді

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2,$$

а рівність досягається тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

В деяких літературних джерелах (див., наприклад, [**17**]) нерівність (2.4) називають *нерівністю Коші–Буняковського–Шварца у формі Енгеля*. У математичних спільнотах ресурсу `www.artofproblemsolving.com` по відношенню до неї поширена назва *«лема Тіту»*. Ми ж її називатимемо *наслідком* (2.4) *нерівності Коші–Буняковського–Шварца*.

Із нерівності (2.4) легко отримуються такі нерівності, доведення яких пропонуємо читачам виконати самостійно:

Лема 2.4. *Нехай $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — додатні дійсні числа. Тоді мають місце такі нерівності:*

$$\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n};$$

$$\frac{a_1}{b_1^2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n^2}\geqslant\frac{1}{a_1+\ldots+a_n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Проілюструємо застосування нерівності (2.4) для доведення низки олімпіадних нерівностей.

Задача 2.3. *Доведіть нерівність (нерівність Несбітта)*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2},$$

де a, b, c — додатні дійсні числа.

Розв'язання. Подамо ліву частину у вигляді

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}.$$

Далі застосуємо нерівність (2.4)

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}{2(ab+ac+bc)}\geqslant\frac{ab+ac+bc+2(ab+ac+bc)}{2(ab+ac+bc)}=\frac{3}{2},$$

бо $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$ (нерівність трьох квадратів).

Інше доведення нерівності Несбітта (з допомогою трансферної нерівності) наведено на сторінці 45 (теорема 2.3). □

Задача 2.4. *Доведіть нерівність:*

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\leqslant 1,$$

де a, b, c — додатні дійсні числа.

Розв'язання. Виконаємо наступні еквівалентні перетворення

$$\frac{2a+b-b}{2a+b}+\frac{2b+c-c}{2b+c}+\frac{2c+a-a}{2c+a}\leqslant 2,$$

звідки

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\geqslant 1.$$

Далі будемо мати на підставі нерівності (2.4)

$$\frac{a^2}{a^2+2ac}+\frac{b^2}{b^2+2ab}+\frac{c^2}{c^2+2bc}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}=$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1.$$

□

Задача 2.5. *Доведіть, що для довільних додатних чисел a, b, c, x, y, z таких, що $a + b + c = x + y + z = 1$, виконується нерівність*

$$\frac{x^2}{1-a} + \frac{y^2}{1-b} + \frac{z^2}{1-c} \geqslant \frac{1}{2}.$$

(VII Соросівська математична олімпіада)

Розв'язання. На підставі нерівності (2.4) дістанемо

$$\frac{x^2}{1-a} + \frac{y^2}{1-b} + \frac{z^2}{1-c} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3-(a+b+c)} = \frac{1}{2},$$

що і треба було довести. □

Задача 2.6. *Для довільних додатних дійсних чисел a, b, c доведіть нерівність*

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

(Всеукраїнська математична олімпіада, 1996 р.)

Розв'язання. Виконаємо наступні еквівалентні перетворення

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} = \frac{a^4}{ab+2ac} + \frac{b^4}{bc+2ba} + \frac{c^4}{ca+2bc} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ac)} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(a^2+b^2+c^2)} =$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

бо за нерівністю трьох квадратів

$$\frac{1}{ab+bc+ca} \geqslant \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

□

Задача 2.7. *Нехай a, b, c, d — такі додатні дійсні числа, що $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Доведіть нерівність*

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{d^2+1} + \frac{d}{a^2+1} \geqslant \frac{4}{5}\left(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} + d\sqrt{d}\right)^2.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{d^2+1}+\frac{d}{a^2+1} = \frac{a^3}{a^2b^2+a^2}+\frac{b^3}{b^2c^2+b^2}+\frac{c^3}{c^2d^2+c^2}+\frac{d^3}{d^2a^2+d^2},$$

то за нерівністю (2.4) дістанемо

$$\frac{\left(\sqrt{a^3}\right)^2}{a^2+a^2b^2}+\frac{\left(\sqrt{b^3}\right)^2}{b^2+b^2c^2}+\frac{\left(\sqrt{c^3}\right)^2}{c^2+c^2d^2}+\frac{\left(\sqrt{d^3}\right)^2}{d^2+d^2a^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}+d\sqrt{d}\right)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+1}.$$

Тому залишилось довести, що

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

Але це насправді так, бо

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2=\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)\leqslant\left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

□

Задача 2.8. *Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b, c виконується нерівність*

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

(Московська математична олімпіада, 2000 р.)

Розв'язання. За нерівністю (2.4) маємо

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)}=$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+3(ab+ac+bc)}.$$

Залишилось довести, що

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+ac+bc)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

В цьому легко переконатись, виконавши рівносильні перетворення:

$$4(a+b+c)^2\geqslant3\left(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca\right)=$$
$$=3(a+b+c)^2+3ab+3bc+3ca;$$

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca;$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant0.$$

□

Задача 2.9. *Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b, c виконується нерівність*

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geqslant\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Розв'язання. Застосовуючи двічі нерівність (2.4), матимемо:

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}{a+b}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2}{b+c}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}{c+a}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}{a+b+b+c+c+a}=\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\cdot\frac{1}{2(a+b+c)}\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{(1+1+1)^2}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)^2\cdot\frac{1}{2(a+b+c)}=\frac{81}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\cdot\frac{1}{2(a+b+c)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Для доведення останньої нерівності, маємо:

$$a+b+c=\frac{(\sqrt{a})^2}{1}+\frac{(\sqrt{b})^2}{1}+\frac{(\sqrt{c})^2}{1}\geqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{3},$$

тобто

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\geqslant\frac{1}{3(a+b+c)}.$$

А тому остаточно:

$$\frac{81}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\cdot\frac{1}{2(a+b+c)}\geqslant\frac{81}{3(a+b+c)}\cdot\frac{1}{2(a+b+c)}=\frac{27}{2(a+b+c)^2},$$

що і треба було довести. □

Задача 2.10. *Нехай n — натуральне число. Дійсні числа α, β, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є додатними, причому $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Доведіть нерівність*

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^3}{\alpha x_{n-1}+\beta x_n}+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}\geqslant\frac{1}{n(\alpha+\beta)}.$$

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що з очевидної нерівності

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2\geqslant 0$$

випливає нерівність

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geqslant x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1. \tag{2.5}$$

Оскільки

$$\frac{x_1^2}{1}+\frac{x_2^2}{1}+\ldots+\frac{x_n^2}{1} \geqslant \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{n},$$

то

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}. \tag{2.6}$$

Тепер, використовуючи нерівності (2.4), (2.5), (2.6), дістанемо наступні оцінки

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^3}{\alpha x_{n-1}+\beta x_n}+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}=$$

$$=\frac{x_1^4}{\alpha x_1^2+\beta x_2x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}^4}{\alpha x_{n-1}^2+\beta x_nx_{n-1}}+\frac{x_n^4}{\alpha x_n^2+\beta x_1x_n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2}{\alpha(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+\beta(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2}{\alpha(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+\beta(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}=$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{\alpha+\beta} \geqslant \frac{1}{n(\alpha+\beta)}.$$

□

Задача 2.11. *Доведіть, що для всіх додатних чисел a, b, c, які задовольняють умову $abc=1$, виконується нерівність*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1995 р.)

Розв'язання. Позначимо ліву частину нерівності через S та подамо її у вигляді

$$S=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{ab+ac}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{ba+bc}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{ca+cb}.$$

Далі, застосовуючи нерівність (2.4), одержимо:

$$S \geqslant \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{ab+ac+ba+bc+ca+cb}=\frac{\left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{2},$$

бо $abc = 1$.

Далі за нерівністю Коші остаточно дістанемо

$$S \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}.$$

В наступних параграфах ми розглянемо й інші способи доведення цієї нерівності (див., сторінки 61, 51). □

Задача 2.12. *Дійсні числа a, b, c, x, y, z задовольняють умови $a \geqslant b \geqslant c > 0$ і $x \geqslant y \geqslant z > 0$. Доведіть, що*

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Розв'язання. Позначимо ліву частину нерівності через S. Оскільки $a \geqslant b \geqslant c$ і $x \geqslant y \geqslant z$, то $bz + cy \leqslant by + cz$, а тому

$$(by+cz)(bz+cy) \leqslant (by+cz)^2 \leqslant 2\big((by)^2 + (cz)^2\big).$$

Покладемо $\alpha = (ax)^2, \beta = (by)^2, \gamma = (cz)^2$. Тоді

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \geqslant \frac{a^2x^2}{2\big((by)^2+(cz)^2\big)} = \frac{\alpha}{2(\beta+\gamma)}$$

Аналогічно, дістанемо

$$\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} \geqslant \frac{\beta}{2(\gamma+\alpha)},$$

$$\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geqslant \frac{\gamma}{2(\alpha+\beta)}.$$

Додавши почленно останні три нерівності, будемо мати

$$S \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Тут ми використали нерівність задачі 2.3 (нерівність Несбітта). □

Задача 2.13. *Нехай $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ і $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$. Доведіть, що*

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що

$$1 = \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \geqslant \frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2}{x+y+z},$$

звідки

$$x+y+z \geqslant \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2,$$

або

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1},$$

що й треба було довести. □

Задача 2.14. *Довжини сторін опуклого шестикутника $ABCDEF$ задовольняють умови $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Доведіть, що*

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2}$$

Розв'язання.

Нехай $CE = a$, $EA = c$, $AC = e$. Застосовуючи нерівність Птоломея до чотирикутника $ABCE$ дістанемо

$$\begin{aligned} BC\cdot(a+c) &= BC\cdot(CE+AE) = \\ &= AB\cdot CE + BC\cdot AE \geqslant \\ &\geqslant AC\cdot BE = e\cdot BE, \end{aligned}$$

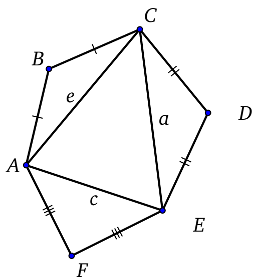


Рис. 2.1.

звідки

$$\frac{BC}{BE} \geqslant \frac{e}{a+c}.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$\frac{DE}{DA} \geqslant \frac{a}{c+e} \quad \text{та} \quad \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{c}{e+a}.$$

Тоді на підставі нерівності Несбітта (задача 2.3), будемо мати:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{e}{a+c}+\frac{a}{c+e}+\frac{c}{c+a} \geqslant \frac{3}{2},$$

що і треба було довести. □

Задача 2.15. *Доведіть, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Розв'язання. Позначимо ліву частину нерівності, що доводиться, через S. Тоді, використовуючи двічі нерівність (2.4) для наборів з трьох чисел, знаходимо

$$S = \frac{(a^2)^2}{a^3 + a^2 b + a b^2} + \frac{(b^2)^2}{b^3 + b^2 c + b c^2} + \frac{(c^2)^2}{c^3 + c^2 a + c a^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{1}{a + b + c} \cdot \left(\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \right) \geqslant$$

$$\frac{1}{a + b + c} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{1 + 1 + 1} = \frac{a + b + c}{3},$$

що і потрібно було довести. Зауважимо, що інший спосіб доведення цієї нерівності наведено на сторінці 38 (задача 2.21). □

Задача 2.16. *Нехай* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *додатні дійсні числа,* $n \geqslant 2$, *такі, що* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. *Доведіть, що*

$$\frac{x_1}{1 + x_2 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1 + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1 + \ldots + x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n - 1}.$$

(Балканська математична олімпіада, 1984)

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у вигляді

$$\frac{x_1}{2 - x_1} + \frac{x_2}{2 - x_2} + \ldots + \frac{x_n}{2 - x_n} \geqslant \frac{n}{2n - 1}.$$

Оскільки

$$\frac{t}{2 - t} = -1 + \frac{2}{2 - t},$$

то остання нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$(-1) + \frac{2}{2 - x_1} + (-1) + \frac{2}{2 - x_2} + \ldots + (-1) + \frac{2}{2 - x_n} \geqslant \frac{n}{2n - 1};$$

$$\frac{2}{2 - x_1} + \frac{2}{2 - x_2} + \ldots + \frac{2}{2 - x_n} \geqslant \frac{n}{2n - 1} + n;$$

$$\frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \ldots + \frac{1}{2 - x_n} \geqslant \frac{n^2}{2n - 1}.$$

За умовою задачі знаменники усіх дробів в лівій частині останньої нерівності додатні, а тому істинність останньої нерівності випливає з нерівності (2.4):

$$\frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \ldots + \frac{1}{2 - x_n} \geqslant \frac{(1 + 1 + \ldots + 1)^2}{2n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)} = \frac{n^2}{2n - 1}.$$

Зазначимо, що інший спосіб розв'язання цієї задачі буде розглянуто в розділі 2.5 (задача 2.47 на сторінці 75). □

Насамкінець зауважимо, що існують модифікації нерівності (2.4).

Задача 2.17. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — два набори додатних чисел. Доведіть, що*

$$\frac{x_1^3}{y_1^2}+\frac{x_2^3}{y_2^2}+\ldots+\frac{x_n^3}{y_n^2}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^3}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2}.$$

Вказівка. Доводити цю нерівність можна методом математичної індукції.

База індукції. Для $n=2$ доведемо таку нерівність

$$\frac{x_1^3}{y_1^2}+\frac{x_2^3}{y_2^2}\geqslant\frac{(x_1+x_2)^3}{(y_1+y_2)^2}.$$

В силу симетрії покладемо $x_1 \geqslant x_2$. Тоді

$$\begin{aligned} x_1^3\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1^2}+x_2^3\frac{(y_1+y_2)^2}{y_2^2} &\geqslant x_1^3\left(\left(1+\frac{y_2}{y_1}\right)^2+\left(1+\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right)\geqslant \\ &\geqslant x_1^3\left(4\frac{y_2}{y_1}+4\frac{y_1}{y_2}\right)=4x_1^3\left(\frac{y_2}{y_1}+\frac{y_1}{y_2}\right)\geqslant \\ &\geqslant 8x_1^3=(2x_1)^3\geqslant(x_1+x_2)^3. \end{aligned}$$

Крок індукції пропонуємо виконати читачеві самостійно. □

2.2. Реверсна техніка Коші для доведення нерівностей

У цьому розділі для доведення нерівностей ми будемо використовувати метод, який називають *реверсною технікою Коші*. Він дозволяє застосовувати нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним в нерівностях, в яких, здавалось би, це неможливо. Цей метод є несподівано простим, але й досить ефективним у своєму застосуванні. Його суть будемо розкривати при доведенні наступних олімпіадних алгебраїчних нерівностей.

Задача 2.18. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює* 3. *Доведіть, що*

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Насправді неможливо використовувати нерівність Коші у знаменниках лівої частини ($b^2+1\geqslant 2b$ та ін.), оскільки одержимо знак нерівності, протилежний до потрібного. Тим не менше, ми зможемо здійснити задумане, але до іншого виразу:

$$\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\geqslant a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{1}{2}ab.$$

Тепер нерівність буде такою:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant(a+b+c)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2},$$

бо $a+b+c=3$ і $ab+bc+ca\leqslant 3$. Дійсно,

$$9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(ab+bc+ca),$$

тобто $ab+bc+ca\leqslant 3$. □

Проаналізуємо це розв'язання. *Реверсом* у ньому є перехід від виразу $\frac{a}{b^2+1}$ до виразу $-\frac{ab^2}{b^2+1}$. Дійсно, якщо у знаменнику застосувати нерівність Коші, то одержимо нерівність

$$\frac{a}{b^2+1}\leqslant\frac{a}{2b}.$$

При цьому знак нерівності є протилежним до знаку, який потрібно довести. Здійснивши перехід до виразу $-\frac{ab^2}{b^2+1}$ і застосувавши у його знаменнику нерівність Коші, одержимо нерівність

$$-\frac{ab^2}{b^2+1}\geqslant-\frac{ab^2}{2b},$$

у якій вже потрібний знак нерівності.

Далі на задачах олімпіад ми продемонструємо реверсну техніку Коші.

Задача 2.19. *Нехай a, b, c — задані дійсні додатні числа. Доведіть, що*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\geqslant a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{1}{2}b.$$

Таким чином,

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geqslant(a+b+c)-\frac{1}{2}(b+c+a)=\frac{a+b+c}{2},$$

що і треба було довести. □

Задача 2.20. *Нехай a, b, c, d — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює* 1. *Доведіть, що*

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geqslant\frac{1}{2}.$$

(Ірландія, 1999 р.)

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^2}{a+b} = a - \frac{ab}{a+b} \geqslant a - \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = a - \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Таким чином,

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geqslant$$
$$\geqslant (a+b+c+d) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 1.$$

Залишилося довести, що $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} \leqslant 1$.

Дійсно, оскільки $a + b + c + d = 1$, то за нерівністю Коші одержуємо:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} \leqslant \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+a}{2} =$$
$$= a + b + c + d = 1,$$

що і треба було довести. □

Задача 2.21. *Доведіть, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geqslant a - \frac{ab(a+b)}{3ab} = \frac{2a-b}{3}.$$

Аналогічно:

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geqslant \frac{2b-c}{3},$$
$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{2c-a}{3}.$$

Додавши ці три нерівності, одержуємо:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2a-b}{3} + \frac{2b-c}{3} + \frac{2c-a}{3} = \frac{a+b+c}{3},$$

що і потрібно було довести. Зауважимо, що інший спосіб доведення цієї нерівності наведено на сторінці 34 (задача 2.15). □

Задача 2.22. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює* 3. *Доведіть, що*

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geqslant 1.$$

(Польща, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2005 р.)

Розв'язання. Скористаємося наступною оцінкою для застосування реверсної техніки Коші:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\geqslant a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^2b^2}}=a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2b^2}.$$

Таким чином,

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geqslant(a+b+c)-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)=$$
$$=3-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\geqslant 3-\frac{2}{3}\cdot 3=1.$$

Залишилося довести, що $\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\leqslant 3$.

Дійсно, оскільки $a+b+c=3$, то

$$9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(ab+bc+ca),$$

тобто $3\geqslant ab+bc+ca$.

Далі,

$$9=3(a+b+c)=2(a+b+c)+3\geqslant 2(a+b+c)+(ab+bc+ca)=$$
$$=(a+b+ab)+(b+c+bc)+(c+a+ca)\geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{a\cdot b\cdot ab}+3\sqrt[3]{b\cdot c\cdot bc}+3\sqrt[3]{c\cdot a\cdot ca}=3\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right),$$

тобто $\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\leqslant 3$, що і треба було довести. □

Задача 2.23. *Нехай a, b, c, d — додатні дійсні числа, сума яких дорівнює* 4. *Доведіть, що*

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2d+1}+\frac{c}{d^2a+1}+\frac{d}{a^2b+1}\geqslant 2.$$

Розв'язання. Застосуємо реверсну техніку Коші:

$$\frac{a}{b^2c+1}=a-\frac{ab^2c}{b^2c+1}\geqslant a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}=$$

$$= a - \frac{b\sqrt{a \cdot ac}}{2} \geqslant a - \frac{b(a + ac)}{4} = a - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{4}abc.$$

Таким чином,

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2d+1} + \frac{c}{d^2a+1} + \frac{d}{a^2b+1} \geqslant$$
$$\geqslant (a+b+c+d) - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da) - \frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab).$$

Оскільки $a+b+c+d=4$, то

$$ab+bc+cd+da = b(a+c)+d(c+a) = (a+c)(b+d) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4,$$

а також

$$abc+bcd+cda+dab = bc(a+d)+da(c+b) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{b+c}{2}\right)^2(a+d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2(b+c) =$$
$$= \frac{1}{4}(a+d)(b+c)(a+b+c+d) = (a+d)(b+c) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{(a+d)+(b+c)}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4.$$

Таким чином, ми довели, що

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2d+1} + \frac{c}{d^2a+1} + \frac{d}{a^2b+1} \geqslant$$
$$\geqslant (a+b+c+d) - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da) - \frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab) \geqslant$$
$$\geqslant 4 - \frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{1}{4}\cdot 4 = 2,$$

що і треба було довести.

Зауваження. Зверніть увагу, що заміну заданого виразу на реверсний ми здійснили двічі. □

2.3. Трансферна нерівність та її застосування

Нехай $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — довільні два набори дійсних чисел, а $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — деяка перестановка чисел набору $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Спробуємо встановити, яка із сум

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n, \tag{2.7}$$

отриманих для різних перестановок $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, найбільша, а яка — найменша.

Означення. *Набори чисел (a_i) та (b_i) називаються* ***однаково впорядкованими****, якщо при всіх k і m із множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, виконуються нерівності:*

$$(a_k - a_m)(b_k - b_m) \geqslant 0,$$

і ***протилежно впорядкованими****, якщо при всіх k і m із множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, виконуються нерівності:*

$$(a_k - a_m)(b_k - b_m) \leqslant 0.$$

Наведемо кілька прикладів.

1. Якщо $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, то при $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ будуть однаково впорядкованими, а при $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ — протилежно впорядкованими.

2. Набори невід'ємних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\left(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2\right)$ будуть однаково впорядковані, а набори додатних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$ будуть протилежно впорядковані, оскільки функція $y = t^2$ монотонно зростає при $t \geqslant 0$, а функція $y = \frac{1}{t}$ монотонно спадає при $t > 0$.

3. Набори $(1, 2, 3)$ і $(2, 1, 3)$ не є ні однаково впорядкованими, ні протилежно впорядкованими.

4. Розглянемо набір чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Для будь-якого набору чисел $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ існує його перестановка $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$, однаково впорядкована з набором $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, і існує перестановка $\left(b''_1, b''_2, \ldots, b''_n\right)$, протилежно впорядкована з набором $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

5. Припустимо, що набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ однаково впорядковані і набір $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ не містить однакових членів. Тоді, якщо набори $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ однаково впорядковані, то однаково впорядкованими будуть і набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. А якщо набори $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ протилежно впорядковані, то протилежно впорядкованими будуть і набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Якщо ж набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ протилежно впорядковані, а набори $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ також протилежно впорядковані, то набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ будуть однаково впорядкованими.

Теорема 2.1. *Серед усіх сум* (2.7) *найбільшою буде сума, підрахована для однаково впорядкованих наборів* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$*, а найменшою буде та сума, для якої набори* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *протилежно впорядковані.*

Зокрема, якщо $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ і $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то для будь-якої перестановки $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$ набору чисел $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, виконується така подвійна нерівність:

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leqslant \\ \leqslant a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \ldots + a_n b'_n \leqslant \\ \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Такі нерівності не мають загальноприйнятої назви, іноді їх називають *транснерівностями*, іноді *нерівностями перестановок*. Ми будемо називати їх *трансферними нерівностями*.

Наслідок 1. *Якщо два набори чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *однаково впорядковані, то для будь-якої перестановки* $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right)$ *набору чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і для будь-якої перестановки* $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$ *набору чисел* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *виконується нерівність*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + \ldots + a'_n b'_n,$$

причому, рівність у цій нерівності буде досягатися тоді і тільки тоді, коли $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Наслідок 2. *Якщо два набори чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *протилежно впорядковані, то для будь-якої перестановки* $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right)$ *набору чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і для будь-якої перестановки* $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$ *набору чисел* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *виконується нерівність*

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leqslant a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + \ldots + a'_n b'_n,$$

причому, рівність у цій нерівності буде досягатися тоді і тільки тоді, коли $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *і* $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right) = (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)$.

Наслідок 3. *Для будь-якої перестановки* $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right)$ *набору чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *виконується нерівність*

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots + a_n a'_n.$$

Наслідок 4. *Для будь-якої перестановки* $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right)$ *набору чисел* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *виконується нерівність*

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \ldots + \frac{a'_n}{a_n} \geqslant n.$$

Доведення (трансферної нерівності). Нехай $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ і $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, а $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ довільна перестановка набору $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Доведемо, що

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \ldots + a_n b'_n. \tag{2.8}$$

Розглянемо різницю цих сум, перетворимо її в спеціальну суму, і застосуємо до неї формулу Абеля:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b'_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(b_k - b'_k\right) = \\ = (a_1 - a_2)\left(b_1 - b'_1\right) + (a_2 - a_3)\left(b_1 + b_2 - b'_1 - b'_2\right) + \ldots + \\ + (a_{n-1} - a_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b'_k\right) + a_n\left(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} b'_k\right) \geqslant 0,\end{aligned}$$

оскільки перші і другі дужки доданків розгорнутої суми — недодатні, бо $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, і для кожного $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, враховуючи умову $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, виконується нерівність: $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} b'_k$. Рівність у цій нерівності буде мати місце тоді і тільки тоді, коли набори $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ і $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$ співпадатимуть.

Аналогічним буде доведення і такої нерівності:

$$a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \ldots + a_n b'_n \geqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1, \tag{2.9}$$

причому рівність у цій нерівності буде мати місце тоді і тільки тоді, коли набори $\left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$ і $(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)$ співпадатимуть.

Зрозуміло, що нерівності (2.8) і (2.9) можна отримувати, коли використовувати перестановки $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right)$ набору $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, бо набори чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ рівноправні.

Трансферна нерівність при вмілому використанні дозволяє достатньо досить легко доводити низку різноманітних нерівностей, зокрема і класичні. Спочатку ми покажемо, як доводяться деякі класичні нерівності за допомогою трансферної нерівності.

Теорема 2.2 (Нерівність AM-GM, нерівність Коші). *Якщо* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — *будь-який набір додатних дійсних чисел, то виконується* *така нерівність:*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2=\ldots=$ $=a_n$.

Доведення. *Перший спосіб.* Легко перевірити, що коли ця нерівність виконується для набору чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то вона буде виконуватися і для набору чисел $(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n)$, де λ — довільне додатне дійсне число. Тому, поклавши $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$, ми одержуємо, що $b_1b_2\ldots b_n=1$, і нам залишилося довести, що $b_1+b_2+\ldots+b_n\geqslant n$. Такий процес переходу до нових змінних називається *нормалізацією* доводжуваної нерівності. Нехай $b_1=\frac{x_1}{x_2}$, $b_2=\frac{x_2}{x_3}$, $\ldots$, $b_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}$, де $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — додатні дійсні числа, тоді $b_n=\frac{x_n}{x_1}$. При цьому, доводжувана нерівність перепишеться так

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

Зауважимо, що набори чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)$ є протилежно впорядкованими, бо функція $y=\frac{1}{t}$ монотонно спадає для $t>0$. Тому разом із перестановкою $\left(\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\ldots,\frac{1}{x_n},\frac{1}{x_1}\right)$ набору $\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)$, *трансферна нерівність* (2.9) дає таку нерівність:

$$x_1\cdot\frac{1}{x_2}+x_2\cdot\frac{1}{x_3}+\ldots+x_{n-1}\cdot\frac{1}{x_n}+x_n\cdot\frac{1}{x_1}\geqslant x_1\cdot\frac{1}{x_1}+x_2\cdot\frac{1}{x_2}+\ldots+x_{n-1}\cdot\frac{1}{x_{n-1}}+x_n\cdot\frac{1}{x_n},$$

тобто

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

Рівність у цій нерівності буде досягатися тоді і тільки тоді, коли будуть співпадати набори чисел $\left(\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\ldots,\frac{1}{x_n},\frac{1}{x_1}\right)$ і $\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)$, тобто коли $x_1=x_2=$ $=\ldots=x_n$. Звідки слідує, що $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$, а тоді $a_1=a_2=\ldots=a_n=$ $=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, що і треба було довести.

Другий спосіб. Нехай $G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Переставивши, якщо потрібно, числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$, можна їх впорядкувати за зростанням: $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$. Розглянемо два набори чисел:

$$\left(\frac{a_1}{G},\frac{a_1a_2}{G^2},\frac{a_1a_2a_3}{G^3},\ldots,\frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}\right) \text{ і } \left(\frac{G}{a_1},\frac{G^2}{a_1a_2},\frac{G^3}{a_1a_2a_3},\ldots,\frac{G^n}{a_1a_2\ldots a_n}\right).$$

Тут $\frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}=1=\frac{G^n}{a_1a_2\ldots a_n}$. Ці два набори протилежно впорядковані. Тому, разом із перестановкою $\left(1,\frac{G}{a_1},\frac{G^2}{a_1a_2},\frac{G^3}{a_1a_2a_3},\ldots,\frac{G^{n-1}}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\right)$ набору

$\left(\frac{G}{a_1}, \frac{G^2}{a_1a_2}, \frac{G^3}{a_1a_2a_3}, \ldots, \frac{G^n}{a_1a_2\ldots a_n}\right)$, *трансферна нерівність* (2.9) дає таку нерівність:

$$\begin{aligned} n &= \frac{a_1}{G}\cdot\frac{G}{a_1} + \frac{a_1a_2}{G^2}\cdot\frac{G^2}{a_1a_2} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}\cdot\frac{G^n}{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \\ &\leqslant \frac{a_1}{G}\cdot 1 + \frac{a_1a_2}{G^2}\cdot\frac{G}{a_1} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{G^n}\cdot\frac{G^{n-1}}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} = \\ &= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{G}, \end{aligned}$$

звідки й слідує нерівність AM-GM. Рівність у цій нерівності буде досягатися тоді і тільки тоді, коли будуть співпадати набори чисел $\left(\frac{G}{a_1}, \frac{G^2}{a_1a_2}, \frac{G^3}{a_1a_2a_3}, \ldots, \frac{G^n}{a_1a_2\ldots a_n}\right)$ і $\left(1, \frac{G}{a_1}, \frac{G^2}{a_1a_2}, \frac{G^3}{a_1a_2a_3}, \ldots, \frac{G^{n-1}}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\right)$, тобто $\frac{G}{a_1} = 1$, $\frac{G^2}{a_1a_2} = \frac{G}{a_1}$, $\frac{G^3}{a_1a_2a_3} = \frac{G^2}{a_1a_2}$, $\ldots$, $\frac{G^n}{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{G^{n-1}}{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$. Звідки знаходимо, що $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = G$, що і завершує доведення.

Теорема 2.3 (Нерівність Несбітта). *Якщо a, b, c — додатні дійсні числа, то виконується така нерівність:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Рівність в цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a = b = c$.

Доведення. Не порушуючи загальності будемо вважати, що $a \leqslant b \leqslant c$, тоді $a+b \leqslant c+a \leqslant b+c$. Звідси слідує, що $\frac{1}{b+c} \leqslant \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{a+b}$. Це означає, що набори $(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c)$ і $(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ є однаково впорядкованими. Тому разом із перестановками $\left(a_1', a_2', a_3'\right) = (b, c, a)$ і $\left(a_1'', a_2'', a_3''\right) = (c, a, b)$ набору (a, b, c), *трансферна нерівність* (2.8) дає такі дві нерівності:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

і

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Додавши ці дві нерівності, одержимо:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3.$$

Звідси й слідує, що

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли числа набору (a, b, c) співпадуть з числами набору $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$, тобто коли $a = \frac{1}{b+c}$, $b = \frac{1}{c+a}$, $c = \frac{1}{a+b}$. Звідки $ab + ca = bc + ab = ca + bc = 1$, тобто $a = b = c$, що і треба було довести.

Ще один спосіб доведення цієї нерівності наведено на сторінці 28 (задача 2.3). □

Теорема 2.4 (Нерівність Чебишова[1]). *Для довільних наборів дійсних чисел* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ *і* $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ *виконується така нерівність:*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Рівність в цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ *або* $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Доведення. За умовою теореми задані два набори чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — однаково впорядковані. Тому, разом з усіма циклічними перестановками чисел набору $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *трансферна нерівність* (2.8) дає нам такі нерівності:

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.\\
&a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1,\\
&a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_nb_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Додавши ці n нерівностей (насправді перша — рівність), ми одержуємо:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Поділивши обидві частини цієї нерівності на n^2, одержимо нерівність, яку треба було довести. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли набір $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ співпадає з усіма своїми циклічними перестановками, тобто коли $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. Це і завершує доведення теореми. □

Теорема 2.5 (Нерівність QM-AM). *Якщо* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— набір додатних дійсних чисел, то виконується така нерівність:*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Доведення. Оскільки набори чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однаково впорядковані, то використовуючи

[1] *Пафнутій Львович Чебишов* (1821–1894) — російський математик.

нерівність Чебишова (теорема 2.4), одержимо нерівність:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\cdot\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

тобто

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2.$$

Звідки, добуваючи квадратний корінь з обох частин цієї нерівності, одержимо нерівність, яку потрібно було довести. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли числа набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ співпадають між собою. Це і завершує доведення теореми. □

Теорема 2.6 (Нерівність Коші–Буняковського–Шварца). *Якщо* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *і* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *— два набори додатних дійсних чисел, то виконується така нерівність:*

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 \leqslant \left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right).$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $x_1=\lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, …, $x_n=\lambda y_n$, *де* $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Доведення. Якщо $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ або $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$, то результат є очевидним. В іншому випадку, нехай $S=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ і $T=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$, тоді $S\neq 0$ і $T\neq 0$. Позначимо через $a_i=\frac{x_i}{S}$ і $a_{n+i}=\frac{y_i}{T}$, для $i=1,2,\ldots,n$. Тоді,

$$2=\left(\frac{x_1^2}{S^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{S^2}\right)+\left(\frac{y_1^2}{T^2}+\ldots+\frac{y_n^2}{T^2}\right)=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_{2n}^2.$$

Розглянемо два набори чисел $(b_1,\ldots,b_{2n})=(a_1,\ldots,a_{2n})$ і $(c_1,\ldots,c_{2n})=(a_1,\ldots,a_{2n})$. Ці два набори $(b_1,\ldots,b_{2n})$ і $(c_1,\ldots,c_{2n})$ однаково впорядковані. Тому разом з перестановкою $\left(c_1',\ldots,c_{2n}'\right)=(a_{n+1},a_{n+2},\ldots,a_{2n},a_1,a_2,\ldots,a_n)$ набору $(c_1,\ldots,c_{2n})$, *трансферна нерівність* (2.8), дає нерівність:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2+\ldots+a_{2n}^2 \geqslant a_1a_{n+1}+a_2a_{n+2}+\ldots+a_na_{2n}+a_{n+1}a_1+\ldots+a_{2n}a_n,$$

тобто

$$2\geqslant\left(\frac{x_1}{S}\cdot\frac{y_1}{T}+\frac{x_2}{S}\cdot\frac{y_2}{T}+\ldots+\frac{x_n}{S}\cdot\frac{y_n}{T}\right)+\left(\frac{y_1}{T}\cdot\frac{x_1}{S}+\frac{y_2}{T}\cdot\frac{x_2}{S}+\ldots+\frac{y_n}{T}\cdot\frac{x_n}{S}\right),$$

$$2\geqslant 2\left(\frac{x_1y_1}{ST}+\frac{x_2y_2}{ST}+\ldots+\frac{x_ny_n}{ST}\right),$$

а після скорочення на 2 і помноження обох частин на $ST>0$, одержимо, що

$$ST\geqslant x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,$$

що і треба було довести. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли набори $(a_1, \ldots, a_{2n})$ і $(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ співпадають, тобто $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$, $\ldots$, $a_n = a_{2n}$. А це означає, що

$$\frac{x_1}{S} = \frac{y_1}{T}, \quad \frac{x_2}{S} = \frac{y_2}{T}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{S} = \frac{y_n}{T},$$

тобто $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $\ldots$, $x_n = \lambda y_n$, де $\lambda = \frac{S}{T}$. Це і завершує доведення теореми. □

Далі розглянемо застосування трансферної нерівності для доведення нерівностей різних математичних олімпіад.

Задача 2.24. *Розглянемо два набори чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant y_n$ і одну перестановку $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ набору чисел $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Доведіть, що*

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \leqslant (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1975 р.)

Розв'язання. Перепишемо нерівність, яку потрібно довести, у такому еквівалентному вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$, то залишається довести, що

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Але ця остання нерівність еквівалентна трансферній нерівності (2.8). □

Задача 2.25. *Нехай x_1, x_2, $\ldots$, x_n — різні додатні цілі числа. Доведіть, що для кожного натурального n виконується нерівність:*

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1978 р.)

Розв'язання. Нехай $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — перестановка чисел набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ така, що $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ і нехай

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n-1)^2}, \ldots, \frac{1}{1^2}\right)$$

(тут кожне $b_i = \frac{1}{(n+1-i)^2}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$).

Розглянемо перестановку $\left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\right)$ набору $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для якої $a'_i = x_{n+1-i}$, для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді, за нашими означеннями, набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ будуть протилежно впорядковані. Отже, до них можна застосувати *трансферну нерівність* (2.9). Матимемо:

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} = a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \ldots + a'_n b_n \geqslant$$
$$\geqslant a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 b_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 =$$
$$= \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2}.$$

Оскільки $a_1 \geqslant 1$, $a_2 \geqslant 2, \ldots, a_n \geqslant n$, то в результаті одержимо:

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \geqslant \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geqslant \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

що і треба було довести. □

Задача 2.26. *Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що*

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1964 р.)

Розв'язання. Оскільки вирази, що стоять в лівій і правій частинах доводжуваної нерівності є симетричними функціями відносно a, b і c, то, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $c \leqslant b \leqslant a$. В цьому випадку матимемо:

$$a(b + c - a) \leqslant b(c + a - b) \leqslant c(a + b - c).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} a(b + c - a) \leqslant b(c + a - b) \quad &\Leftrightarrow \\ ab + ca - a^2 \leqslant bc + ab - b^2 \quad &\Leftrightarrow \\ a^2 - b^2 + bc - ca \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \\ (a - b)(a + b - c) \geqslant 0, \quad & \end{aligned}$$

яка є правильною. Аналогічно доводиться нерівність $b(c + a - b) \leqslant$ $\leqslant c(a + b - c)$. Таким чином, набори чисел $(a_1, a_2, a_2) = (a, b, c)$ і $(b_1, b_2, b_3) =$ $= (a(b + c - a), b(c + a - b), c(a + b - c))$ є протилежно впорядкованими. Тому, разом з перестановками $\left(a'_1, a'_2, a'_3\right) = (b, c, a)$ і $\left(a''_1, a''_2, a''_3\right) = (c, a, b)$, до них можна двічі застосувати *трансферну нерівність* (2.9). Одержимо:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant$$
$$\leqslant ba(b + c - a) + cb(c + a - b) + ac(a + b - c),$$

і

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant$$
$$\leqslant ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$$

Отже, додавши ці дві нерівності, після спрощень у правій частині, одержимо:

$$2\left(a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right)\leqslant 6abc.$$

Після скорочення на 2 одержимо нерівність, яку треба було довести. □

Задача 2.27. *Нехай a,b,c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1983 р.)

Розв'язання. Розглянемо випадок $c\leqslant b\leqslant a$, (інші випадки розглядаються аналогічно). Як і в попередній задачі, ми матимемо, що

$$a(b+c-a)\leqslant b(c+a-b)\leqslant c(a+b-c)$$

і також матимемо, що

$$\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}.$$

Це означає, що набори (a,b,c) і $(a(b+c-a),b(c+a-b),c(a+b-c))$ — протилежно впорядковані, а набори (a,b,c) і $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ також є протилежно впорядкованими. А тому, набори $(a_1,a_2,a_3)=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ і $(b_1,b_2,b_3)=$ $=(a(b+c-a),b(c+a-b),c(a+b-c))$ є однаково впорядкованими. Тому, разом з перестановкою $\left(a_1',a_2',a_3'\right)=\left(\frac{1}{c},\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$, до них можна застосувати *трансферну нерівність* (2.9), одержати нерівність:

$$\frac{1}{a}a(b+c-a)+\frac{1}{b}b(c+a-b)+\frac{1}{c}c(a+b-c)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{c}a(b+c-a)+\frac{1}{a}b(c+a-b)+\frac{1}{b}c(a+b-c).$$

Отже,

$$a+b+c\geqslant\frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+a+b+c.$$

Звідси одержуємо, що

$$\frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}\leqslant 0.$$

Помноживши обидві частини цієї нерівності на abc, одержуємо, що

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 2.28. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, для яких $abc = 1$. Доведіть, що*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1995 р.)

Розв'язання. Не порушуючи загальності ми можемо вважати, що $c \leqslant b \leqslant \leqslant a$. Нехай $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ і $z = \frac{1}{c}$, тоді $x \leqslant y \leqslant z$ і $xyz = 1$. Тому,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} = \\ &= \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}+\frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \\ &= \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}. \end{aligned}$$

Оскільки $x \leqslant y \leqslant z$, легко довести, що $x+y \leqslant z+x \leqslant y+z$ і тому, $\frac{x}{y+z} \leqslant \frac{y}{z+x} \leqslant \frac{z}{x+y}$. Це означає, що набори чисел $(a_1, a_2, a_3) = (x, y, z)$ і $(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}\right)$ однаково впорядковані. Тому, разом з перестановками $\left(a_1', a_2', a_3'\right) = (y, z, x)$ і $\left(a_1'', a_2'', a_3''\right) = (z, x, y)$, до них можна двічі застосувати *трансферну нерівність* (2.8), одержати нерівності

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{xy}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{zx}{x+y},$$

і

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{zx}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{yz}{x+y}.$$

Отже, додавши ці дві нерівності, після спрощень у правій частині, застосувавши нерівність Коші AM-GM, матимемо:

$$2S \geqslant x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$$

Звідси одержуємо, що $S \geqslant \frac{3}{2}$, що і треба було довести. Інші доведення цієї нерівності є на сторінках 32, 61. □

Задача 2.29. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

(Азіатсько-Тихоокеанська математична олімпіада, 1998 р.)

Розв'язання. Зауважимо, що

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{abc}{abc}\geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geqslant \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Зробимо заміну змінних: $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$, де x,y,z — додатні дійсні числа. Тоді остання нерівність перепишеться так:

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\geqslant \frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz}.$$

Розглянемо два набори чисел $\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\right)=\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{z},\frac{z}{y},\frac{y}{x}\right)$ і $\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\right)=\left(\frac{x^2}{y^2},\frac{y^2}{z^2},\frac{z^2}{x^2},\frac{x^2}{z^2},\frac{z^2}{y^2},\frac{y^2}{x^2}\right)$. Ці набори будуть однаково впорядкованими, бо функція $y=t^2$ монотонно зростає, при $t>0$. Тому, разом з перестановкою $\left(a'_1,a'_2,a'_3,a'_4,a'_5,a'_6\right)=\left(\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{y},\frac{z}{y},\frac{y}{x},\frac{x}{z}\right)$, до них можна застосувати *трансферну нерівність* (2.8), і одержати нерівність:

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\geqslant \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z^2}{x^2}\cdot\frac{x}{y}+\frac{x^2}{z^2}\cdot\frac{z}{y}+\frac{z^2}{y^2}\cdot\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{x}{z}=$$

$$=\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x^2}{yz}+\frac{z^2}{xy}+\frac{y^2}{zx}=\frac{2\left(x^3+y^3+z^3\right)}{xyz}.$$

Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 2.30. *Нехай a,b,c,d — невід'ємні дійсні числа такі, що $a+b+c+d=4$. Доведіть, що*

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\leqslant 4.$$

(Математична олімпіада В'єтнаму, 2004 р.)

Розв'язання. Нехай (x,y,z,t) — така перестановка чисел набору (a,b,c,d), що $t\leqslant z\leqslant y\leqslant x$. Тоді $yzt\leqslant xzt\leqslant xyt\leqslant xyz$. Це означає, що набори $\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)=(x,y,z,t)$ і $\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)=(xyz,xyt,xzt,yzt)$ однаково впорядковані. Тому, разом із перестановками $\left(a'_1,a'_2,a'_3,a'_4\right)=(a,b,c,d)$ і $\left(b'_1,b'_2,b'_3,b'_4\right)=(abc,bcd,cda,dab)$, наслідок 1 дає нерівність:

$$x\cdot xyz+y\cdot xyt+z\cdot xzt+t\cdot yzt\geqslant a\cdot abc+b\cdot bcd+c\cdot cda+d\cdot dab,$$

тобто $xy\cdot xz+xy\cdot yt+xz\cdot zt+zt\cdot yt\geqslant a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab$.

Використовуючи нерівність AM-GM, знаходимо:

$$xy\cdot xz+xy\cdot yt+xz\cdot zt+zt\cdot yt=(xz+yt)(xy+zt)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(xy+xz+yt+zt)^2\leqslant 4,$$

бо

$$xy+xz+yt+zt=(x+z)(y+t)\leqslant\frac{1}{4}(x+z+y+t)^2=\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=4.$$

Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 2.31. *Нехай a,b,c — додатні дійсні числа. Доведіть, що*

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

(Математична олімпіада Румунії, 2007 р.)

Розв'язання. Оскільки вирази, що стоять в лівій і правій частинах нерівності є симетричними функціями відносно a, b і c, то, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $0<c\leqslant b\leqslant a$. Тоді набори (a,b,c) і $\left(a^2,b^2,c^2\right)$ однаково впорядковані. Крім того, $b+c\leqslant c+a\leqslant a+b$, тобто $\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{c+a}\leqslant\frac{1}{b+c}$. Це означає, що набори (a,b,c) і $\left(\frac{1}{a+b},\frac{1}{c+a},\frac{1}{b+c}\right)$ також однаково впорядковані. Тому набори $(a_1,a_2,a_3)=\left(a^2,b^2,c^2\right)$ і $(b_1,b_2,b_3)=\left(\frac{1}{a+b},\frac{1}{c+a},\frac{1}{b+c}\right)$ однаково впорядковані. Тоді разом із перестановкою $\left(a_1',a_2',a_3'\right)=\left(b^2,c^2,a^2\right)$, *трансферна нерівність* (2.8), дає нерівність:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}.$$

Використовуючи цю нерівність, одержуємо:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}=$$
$$=\frac{b^2+bc}{b+c}+\frac{c^2+ca}{c+a}+\frac{a^2+ab}{a+b}=b+c+a,$$

що і треба було довести. □

Задача 2.32. *Нехай a,b,c — додатні дійсні числа такі, що $abc=1$. Доведіть, що*

$$a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3\geqslant 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

(Математична олімпіада Китаю, 1989 р.)

Розв'язання. Зауважимо, що набори $(a_1,a_2,a_3)=(a,b,c)$ і $(b_1,b_2,b_3)=$ $=\left(a^2,b^2,c^2\right)$ — однаково впорядковані. Це випливає з того, що функція $y=t^2$

монотонно зростає при $t > 0$. Тому, разом з перестановкою $\left(a_1', a_2', a_3'\right) = (b, c, a)$, *трансферна нерівність* (2.8) дає, що

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Оскільки $abc = 1$, то $(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$. Далі, аналогічно, набори $(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ і $(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right)$ — однаково впорядковані. Тому, разом з перестановкою $\left(a_1', a_2', a_3'\right) = \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$, *трансферна нерівність* (2.8) дає, що

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geqslant \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c^2} = \\ = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Додавши одержані дві нерівності

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

і

$$(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a,$$

одержуємо, що

$$a^3 + b^3 + c^3 + (ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geqslant 2\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right).$$

Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 2.33. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що*

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

(Математична олімпіада Чехії і Словаччини, 1996 р.)

Розв'язання. Зауважимо, що набори $(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ і $(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ — однаково впорядковані, бо вони співпадають. Тому, разом з перестановкою $\left(a_1', a_2', a_3'\right) = \left(\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right)$, *трансферна нерівність* (2.8) дає, що

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} \geqslant \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} + \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a},$$

тобто

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c},$$

що і завершує розв'язання задачі. □

2.4. Про новітні технології доведення симетричних нерівностей з трьома змінними

У цьому параграфі ми зосередимо увагу на доведенні симетричних нерівностей від трьох змінних.

Многочлен від n змінних $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають **симетричним**, якщо він є симетричною функцією від своїх змінних, тобто є інваріантним при будь-яких перестановках його змінних:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\right),$$

де $(i_1, \dots, i_n)$ — це довільна перестановка чисел $1, 2, \dots, n$.

Базовими прикладами симетричних многочленів від n змінних є так звані **основні симетричні многочлени**

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ &\ldots \\ s_n &= x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned}$$

Основними симетричними многочленами від трьох змінних a, b, c є многочлени $a + b + c$, $ab + bc + ca$ і abc, які ми позначатимемо p, q і r відповідно.

Важливим є класичний результат алгебри многочленів (відомий під назвою «*основна теорема про симетричні многочлени*»), суть якого полягає в тому, що будь-який симетричний многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ однозначно подається у вигляді многочлена Q відносно основних симетричних многочленів:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Доведення цього твердження ми не будемо наводити тут (із доведенням можна ознайомитись, наприклад, у книжці [**2**]).

Нехай $P(x, y, z)$ — функція від трьох змінних x, y і z. Ми будемо використовувати такі міжнародні позначення (у вітчизняній літературі вони майже не зустрічаються):

$$\sum_{cyc} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\begin{aligned} \sum_{sym} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + \\ + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x). \end{aligned}$$

Наприклад,

$$\sum_{cyc} x^3y = x^3y + y^3z + z^3x, \qquad \sum_{sym} x^3 = 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right),$$

$$\sum_{sym} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y, \quad \sum_{sym} xyz = 6xyz.$$

Сподіваємося, що наші читачі з легкістю опанують нові позначення для вище означених сум і надалі з легкістю будуть користуватися ними. Відмітимо такий зв'язок між ними:

$$\sum_{sym} P(x,y,z) = \sum_{cyc} (P(x,y,z) + P(x,z,y)).$$

2.4.1. *Нерівність Шура та її застосування*

Теорема 2.7 (нерівність Шура[1]). *Нехай x, y, z — дійсні невід'ємні числа. Тоді для будь-якого дійсного $\lambda > 0$ виконується така нерівність*

$$\sum_{cyc} x^\lambda (x-y)(x-z) \geqslant 0, \tag{2.10}$$

тобто в «розгорнутому» вигляді ця нерівність має вигляд:

$$x^\lambda (x-y)(x-z) + y^\lambda (y-z)(y-x) + z^\lambda (z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Доведення. Оскільки ця нерівність є симетричною відносно своїх змінних, то, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $x \geqslant y \geqslant z$. Перепишемо ліву частину цієї нерівності у вигляді:

$$(x-y)\left(x^\lambda (x-z) - y^\lambda (y-z)\right) + z^\lambda (x-z)(y-z) \geqslant 0,$$

бо за припущенням $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$ і тому виконуються такі нерівності $x^\lambda \geqslant y^\lambda$, $x - z \geqslant y - z \geqslant 0$, тобто $x^\lambda (x-z) - y^\lambda (y-z) \geqslant 0$, а також $x - y \geqslant 0$ і $z^\lambda (x-z)(y-z) \geqslant 0$, що і треба було довести.

Зауваження. Рівність у нерівності Шура досягається тоді і тільки тоді, коли або $x = y = z$, або $x = y$, $z = 0$, або $y = z$, $x = 0$, або $z = x$, $y = 0$. □

Задача 2.34. *Доведіть, що для будь-яких дійсних невід'ємних чисел x, y і z виконується нерівність*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

Розв'язання. Розглянемо *нерівність Шура*:

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geqslant 0.$$

Вона еквівалентна таким нерівностям

$$\sum_{cyc} \left(x^3 - x^2y - x^2z + xyz\right) \geqslant 0,$$

[1] *Ісай Шур* (Issai Schur, 1875–1941) — німецький математик

$$\sum_{cyc} x^3 + \sum_{cyc} xyz \geqslant \sum_{cyc} \left(x^2y + x^2z\right).$$

Остання нерівність і є тією нерівністю, яку потрібно було довести. □

Задача 2.35. *Нехай a, b, c – невід'ємні дійсні числа, сума яких дорівнює* 2. *Доведіть, що*

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Розв'язання. Використовуючи нерівність Шура четвертого степеня (для $\lambda = 2$), матимемо:

$$a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geqslant 0,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geqslant a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b).$$

Оскільки $a + b + c = 2$, то матимемо:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2abc \geqslant a^3(2-a) + b^3(2-b) + c^3(2-c),$$

$$2\left(a^4 + b^4 + c^4\right) + 2abc \geqslant 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right).$$

Після скорочення на 2, одержимо:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc \geqslant a^3 + b^3 + c^3,$$

що і треба було довести.

Рівність досягається для $a = b = c = \frac{2}{3}$ або $a = b = 1$, $c = 0$ та усіх їхніх перестановок. □

Задача 2.36. *Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x + y + z = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1984 р.)

Розв'язання. Оскільки $x + y + z = 1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$0 \leqslant (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}(x + y + z)^3$$

(тут ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили їх рівною три).

Спочатку доведемо ліву нерівність

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \geqslant 0.$$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки, вона запишеться так
$$xyz + \sum_{sym} x^2 y \geqslant 0.$$
Ця нерівність є очевидною, оскільки x, y, z — невід'ємні дійсні числа.

Тепер доведемо праву нерівність
$$\frac{7}{27}(x+y+z)^3 \geqslant (xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz.$$

Розглянемо різницю між лівою й правою частинами. Розкривши дужки і звівши подібні доданки, вона запишеться так
$$7\sum_{cyc} x^3 + 15xyz - 6\sum_{sym} x^2 y \geqslant 0.$$
Щоб довести цю нерівність, зробимо такі перетворення її лівої частини:
$$7\sum_{cyc} x^3 + 15xyz - 6\sum_{sym} x^2 y =$$
$$= \left(2\sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2 y\right) + 5\left(3xyz + \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2 y\right) + \sum_{sym} x^2 y.$$

Оскільки за *нерівністю Коші* виконується така нерівність
$$\sum_{cyc} x^3 \geqslant 3xyz,$$
то
$$2\sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2 y \geqslant 3xyz + \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2 y \geqslant 0,$$
що і треба було довести (остання нерівність — результат задачі 2.34). □

Задача 2.37. *Додатні числа a, b, c такі, що* $abc = 1$. *Доведіть, що виконується така нерівність*
$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 2000 р.)

Розв'язання. Оскільки $abc = 1$, то можна зробити нашу нерівність однорідною:
$$\left(a-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{b}\right)\left(b-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{c}\right)\left(c-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{a}\right) \leqslant abc.$$

Введемо заміну: $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, де $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $xyz = 1$ і наша нерівність запишеться так:
$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3}\right)\left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \leqslant x^3y^3z^3.$$

Звідки одержуємо:

$$\left(x^3 - xyz + \frac{x^2z^2}{y}\right)\left(y^3 - xyz + \frac{y^2x^2}{z}\right)\left(z^3 - xyz + \frac{z^2y^2}{x}\right) \leqslant x^3y^3z^3,$$

$$x\left(x^2 - yz + \frac{xz^2}{y}\right)y\left(y^2 - zx + \frac{yx^2}{z}\right)z\left(z^2 - xy + \frac{zy^2}{x}\right) \leqslant x^3y^3z^3,$$

$$\left(x^2y - y^2z + z^2x\right)\left(y^2z - z^2x + x^2y\right)\left(z^2x - x^2y + y^2z\right) \leqslant x^3y^3z^3.$$

Далі, розкриваючи дужки, звівши подібні доданки і, розташувавши їх по обидва боки нерівності так, щоб їхні коефіцієнти були додатними, одержимо:

$$3x^3y^3z^3 + \sum_{cyc} x^6y^3 \geqslant \sum_{cyc} x^4y^4z + \sum_{cyc} x^5y^2z^2$$

або

$$3\left(x^2y\right)\left(y^2z\right)\left(z^2x\right) + \sum_{cyc}\left(x^2y\right)^3 \geqslant \sum_{sym}\left(x^2y\right)^2\left(y^2z\right).$$

Ця нерівність є результатом задачі 2.34 (наслідком із нерівності Шура) відносно змінних $u = x^2y$, $v = y^2z$ і $w = z^2x$. □

2.4.2. *Нерівність Мюрхеда та її застосування*

Теорема 2.8 (Нерівність Мюрхеда[1]). *Нехай $(a_1, a_2, a_3) \succ (b_1, b_2, b_3)$, тобто a_1, a_2, a_3 і b_1, b_2, b_3 — такі дійсні числа, що*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant 0,$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant 0,$$

$$a_1 \geqslant b_1,\ \ a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2,\ \ a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Тоді для будь-яких додатних дійсних чисел x, y і z виконується така нерівність

$$\sum_{sym} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} \geqslant \sum_{sym} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Доведення. Розглянемо два випадки.

1) Нехай $b_1 \geqslant a_2$, тоді $a_1 \geqslant a_1 + a_2 - b_1$ і $a_1 \geqslant b_1$, тобто $a_1 \geqslant \max(a_1 + a_2 - b_1,\, b_1)$. Оскільки $a_1 = \max(a_1, a_2)$, то $\max(a_1, a_2) \geqslant \max(a_1 + a_2 - b_1,\, b_1)$.

Крім того, $a_1 + a_2 - b_1 \geqslant b_1 + a_3 - b_1 = a_3$ і $a_1 + a_2 - b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3$, тобто $\max(a_1 + a_2 - b_1,\, a_3) \geqslant \max(b_2,\, b_3)$. Таким чином, використовуючи ідею доведення *теореми Шура*, одержуємо

$$\sum_{sym} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} = \sum_{cyc} z^{a_3}\left(x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1}\right) \geqslant$$

[1] *Роберт Франклін Мюрхед* (Robert Franklin Muirhead, 1860–1941) — шотландський математик.

$$\geqslant \sum_{cyc} z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1}+x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}\right)=$$
$$=\sum_{cyc} x^{b_1}\left(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1}\right)\geqslant$$
$$\geqslant \sum_{cyc} x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2}\right)=\sum_{sym} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

2) Нехай $b_1 \leqslant a_2$, тоді $3b_1 \geqslant b_1+b_2+b_3 = a_1+a_2+a_3 \geqslant b_1+a_2+a_3$, тобто $b_1 \geqslant a_2+a_3-b_1$ і $a_1 \geqslant a_2 \geqslant b_1 \geqslant a_2+a_3-b_1$. Звідси слідує, що $\max(a_2, a_3) \geqslant \max(b_1, a_2+a_3-b_1)$ і $\max(a_1, a_2+a_3-b_1) \geqslant \max(b_2, b_3)$. Таким чином, аналогічно до попереднього, одержуємо:

$$\sum_{sym} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} = \sum_{cyc} x^{a_1}\left(y^{a_2}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant \sum_{cyc} x^{a_1}\left(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1}+y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}\right)=$$
$$=\sum_{cyc} y^{b_1}\left(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1}+x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1}\right)\geqslant$$
$$\geqslant \sum_{cyc} y^{b_1}\left(x^{b_2}z^{b_3}+x^{b_3}z^{b_2}\right)=\sum_{sym} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Зауваження. Рівність у нерівності Мюрхеда досягається тоді і тільки тоді, коли або $x=y=z$, або $x=y$, $z=0$, або $y=z$, $x=0$, або $z=x$, $y=0$. □

Задача 2.38. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа такі, що $abc=1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leqslant 1.$$

(Турнір Міст, 1997)

Розв'язання. Оскільки $abc=1$, то спочатку зробимо дану нерівність однорідною:

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}}+\frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}}+\frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}}\leqslant\frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

Після нових позначень $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$, де $x, y, z>0$, нерівність матиме вигляд:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leqslant\frac{1}{xyz}.$$

Після множення обох частин нерівності на спільний знаменник, одержимо еквівалентну нерівність:

$$xyz\sum_{cyc}\left(x^3+y^3+xyz\right)\left(y^3+z^3+xyz\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(x^3+y^3+xyz\right)\left(y^3+z^3+xyz\right)\left(z^3+x^3+xyz\right).$$

Розкриття дужок і зведення подібних доданків, одержимо:

$$\sum_{sym}x^6y^3\geqslant\sum_{sym}x^5y^2z^2.$$

Оскільки $(6,3,0)\succ(5,2,2)$, то за теоремою Мюрхеда, остання нерівність є правильною. □

Задача 2.39. *Нехай a,b,c — додатні дійсні числа такі, що $abc=1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1995 р.)

Розв'язання. Оскільки $abc=1$, то це дає нам змогу зробити задану нерівність еквівалентну такій однорідній нерівності:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2(abc)^{4/3}}.$$

Зробимо заміну змінних: $a=x^3, b=y^3, c=z^3$, де $x,y,z>0$. Тоді попередня нерівність запишеться так:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^9\left(y^3+z^3\right)}\geqslant\frac{3}{2x^4y^4z^4}.$$

Звівши її до спільного знаменника і, згрупувавши відповідні доданки, одержимо:

$$\sum_{sym}x^{12}y^{12}+2\sum_{sym}x^{12}y^9z^3+\sum_{sym}x^9y^9z^6\geqslant3\sum_{sym}x^{11}y^8z^5+6x^8y^8z^8$$

або

$$\left(\sum_{sym}x^{12}y^{12}-\sum_{sym}x^{11}y^8z^5\right)+2\left(\sum_{sym}x^{12}y^9z^3-\sum_{sym}x^{11}y^8z^5\right)+$$
$$+\left(\sum_{sym}x^9y^9z^6-\sum_{sym}x^8y^8z^8\right)\geqslant0.$$

За теоремою Мюрхеда, остання нерівність є правильною при всіх додатних значеннях змінних, бо $(12,12,0)\succ(11,8,5)$, $(12,9,3)\succ(11,8,5)$ і $(9,9,6)\succ(8,8,8)$.

Нагадаємо, що інше доведення цієї нерівності було наведено на сторінці 32. $\square$

Задача 2.40. *Нехай $x,\ y,\ z$ — додатні дійсні числа. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geqslant\frac{9}{4}.$$

(Іран, 1996 р.)

Розв'язання. Зауважимо, ця нерівність є однорідною. Тому, звівши її до спільного знаменника і, згрупувавши відповідні доданки, одержимо еквівалентну нерівність:

$$4\sum_{sym}x^5y+2\sum_{cyc}x^4yz+6x^2y^2z^2-\sum_{sym}x^4y^2-6\sum_{cyc}x^3y^3-2\sum_{sym}x^3y^2z\geqslant 0$$

або

$$\left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^4y^2\right)+3\left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^3y^3\right)+$$
$$+2xyz\left(\sum_{cyc}x\,(x-y)(x-z)\right)\geqslant 0.$$

Остання нерівність є правильною, бо при будь-яких додатних значеннях змінних, за теоремою Мюрхеда, невід'ємними будуть доданки в перших двох дужках, адже $(5,1,0)\succ(4,2,0)$ і $(5,1,0)\succ(3,3,0)$, а, за теоремою Шура, невід'ємною буде й сума в третіх дужках. $\square$

Задача 2.41. *Нехай m_a, m_b, m_c — медіани трикутника ABC, які проведені до сторін BC, CA, AB, а r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл цього трикутника, які дотикаються вказаних сторін відповідно. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\frac{r_ar_b}{m_am_b}+\frac{r_br_c}{m_bm_c}+\frac{r_cr_a}{m_cm_a}\geqslant 3.$$

Розв'язання. Нехай $2p=a+b+c$, де $a,\ b,\ c$ — відповідні сторони трикутника, тоді, як відомо, вказані елементи трикутника можна виразити через ці сторони:

$$r_a=\sqrt{\frac{p\,(p-b)(p-c)}{p-a}},\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\quad \text{і т. д.}$$

Таким чином,

$$\sum_{cyc}\frac{r_b r_c}{m_b m_c}=\sum_{cyc}\frac{4p(p-a)}{\sqrt{(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}}.$$

Далі, використовуючи нерівність $\sqrt{\alpha\beta}\leqslant\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, де $\alpha>0$ і $\beta>0$, одержуємо:

$$\sum_{cyc}\frac{r_b r_c}{m_b m_c}\geqslant\sum_{cyc}\frac{8p(p-a)}{(2c^2+2a^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}=$$
$$=\sum_{cyc}\frac{2(a+b+c)(b+c-a)}{4a^2+b^2+c^2}.$$

Тепер залишилося довести таку нерівність:

$$\sum_{cyc}\frac{2(a+b+c)(b+c-a)}{4a^2+b^2+c^2}\geqslant 3.$$

Звівши її до спільного знаменника і, згрупувавши відповідні доданки, одержимо еквівалентну нерівність:

$$2\sum_{cyc}a^6+4\sum_{cyc}a^4bc+20\sum_{cyc}a^3b^2c+68\sum_{cyc}a^3b^3+16\sum_{cyc}a^5b\geqslant$$
$$\geqslant 276a^2b^2c^2+27\sum_{cyc}a^4b^2.$$

Нехай x, y, z — відрізки дотичних до вписаного кола, проведених з вершин A, B, C відповідно, тоді $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, де $x,y,z>0$. Тоді остання нерівність, для сторін трикутника, еквівалентна такій алгебраїчній нерівності:

$$25\sum_{sym}x^6+230\sum_{sym}x^5y+115\sum_{sym}x^4y^2+10\sum_{sym}x^3y^3+80\sum_{sym}x^4yz\geqslant$$
$$\geqslant 336\sum_{sym}x^3y^2z+124\sum_{sym}x^2y^2z^2.$$

Далі, згрупувавши відповідні суми належним чином, ми за теоремою Мюрхеда, одержимо потрібний результат:

$$25\left(\sum_{sym}x^6-\sum_{sym}x^3y^2z\right)+230\left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^3y^2z\right)+$$
$$+81\left(\sum_{sym}x^4y^2-\sum_{sym}x^3y^2z\right)+34\left(\sum_{sym}x^4y^2-\sum_{sym}x^2y^2z^2\right)+$$

$$+10\left(\sum_{sym} x^3y^3 - \sum_{sym} x^2y^2z^2\right) + 80\left(\sum_{sym} x^4yz - \sum_{sym} x^2y^2z^2\right) \geqslant 0,$$

бо $(6,0,0) \succ (3,2,1)$, $(5,1,0) \succ (3,2,1)$, $(4,2,0) \succ (3,2,1)$, $(4,2,0) \succ (2,2,2)$, $(3,3,0) \succ (2,2,2)$ і $(4,1,1) \succ (2,2,2)$. $\square$

2.4.3. *Метод різниць змінних*

Якщо $P(a,b,c)$ — симетричний многочлен, то основними симетричними многочленами для нього будуть: $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ і $r = abc$. Згідно з основною теоремою про симетричні многочлени кожна симетрична нерівність від трьох змінних може бути переписана у позначеннях p, q, r.

Ми пропонуємо читачам самостійно в якості вправи довести такі тотожності:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2q$;
2) $x^3 + y^3 + z^3 = p(p^2 - 3q) + 3r$;
3) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = q^2 - 2pr$;
4) $x^4 + y^4 + z^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr)$;
5) $(x + y)(y + z)(z + x) = pq - r$;
6) $(x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x_y) = p^2 + q$;
7) $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = pq - 3r$;
8) $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + p + q + r$;
9) $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) = p^2 + q^2 + r^2 - 2pr - 2q + 1$.

Далі, використовуючи симетричність цих многочленів, ми не порушуючи загальності можемо зробити припущення $a \geqslant b \geqslant c$.

Введемо позначення *різниць змінних* $x = a - b$, $y = b - c$. Нескладними перетвореннями одержуємо, що

$$p = 3c + (x + 2y), \tag{2.11}$$

$$q = 3c^2 + 2(x + 2y)\cdot c + (x + y)\,y, \tag{2.12}$$

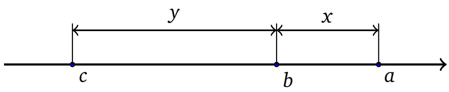
$$r = c^3 + (x + 2y)\cdot c^2 + (x + y)\,y\cdot c, \tag{2.13}$$

де $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тоді кожна симетрична нерівність може бути переписана в термінах x, y, c, причому $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Ми пропонуємо такий алгоритм доведення симетричних нерівностей від трьох змінних (*метод різниць змінних*):

1) Розглядаємо різницю Δ між лівою і правою частинами нерівності, яка є симетричною функцією.
2) Цю різницю Δ подаємо через основні симетричні многочлени p, q, r.

3) Робимо припущення, що $a \geqslant b \geqslant c$ і вводимо позначення для різниць змінних: $x = a - b$, $y = b - c$.



4) Переписуємо Δ, використовуючи формули, і подаємо Δ у вигляді многочлена від «однієї змінної» c з коефіцієнтами, які виражені через x, y, причому $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Вказаний метод доведення часто вимагає достатньо громіздких перетворень (в англомовних математичних спільнотах він відомий як «Buffalo Way» — «шлях буйвола»), тому ми пропонуємо його використовувати в тому випадку, коли немає інших здогадок доведення симетричної нерівності.

Ми проілюструємо цей метод для доведення деяких базових симетричних нерівностей від трьох змінних, а читачам пропонуємо спробувати відшукати інші способи їхніх доведень.

Теорема 2.9. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Доведіть виконання нерівностей:*

а) $p^2 \geqslant 3q$;
б) $p^3 \geqslant 27r$;
в) $q^2 \geqslant 3pr$;
г) $2p^3 + 9r \geqslant 7pq$;
ґ) $p^2q + 3pr \geqslant 4q^2$.

Доведення. а) Будемо діяти за запропонованим алгоритмом. Розглянемо різницю $\Delta = p^2 - 3q$, використаємо формули (2.11)–(2.13) і виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned}\Delta = p^2 - 3q &= (3c + (x + 2y))^2 - 3\big(3c^2 + 2(x + 2y)\cdot c + (x + y)y\big) = \\ &= 9c^2 + 6(x + 2y)\cdot c + (x + 2y)^2 - 9c^2 + 6(x + 2y)\cdot c + 3(x + y)y = \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 3xy + 3y^2 = \\ &= x^2 + xy + y^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Рівність наступає, коли $x = y = 0$, тобто при $a = b = c$.

Зауважимо, що нерівність $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$ істинна для довільного c, тобто нерівність $p^2 \geqslant 3q$ виконується для довільних дійсних a, b, c. Крім цього, вона рівносильна *нерівності трьох квадратів*.

б) Розглянемо різницю $\Delta = p^3 - 27r$, використаємо формули (2.11)–(2.13) і виконаємо перетворення:

$$\Delta = p^3 - 27r = (3c + (x+2y))^3 - 27\left(c^3 + (x+2y)\cdot c^2 + (x+y)\,y\cdot c\right) =$$
$$= 27c^3 + 27(x+2y)\cdot c^2 + 9(x+2y)^2\cdot c + (x+2y)^3 -$$
$$- 27c^3 + 27(x+2y)\cdot c^2 + 27(x+y)\,y\cdot c =$$
$$= \left(9(x+2y)^2 - 27(x+y)\,y\right)\cdot c + (x+2y)^3 =$$
$$= 9\left(x^2 + xy + y^2\right)\cdot c + (x+2y)^3 \geqslant 0,$$

оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $c > 0$. Рівність настає, коли $x = y = 0$, тобто при $a = b = c$.

Зауважимо, що доведена нерівність рівносильна нерівності Коші для трьох чисел.

в) Розглянемо різницю $\Delta = q^2 - 3pr$, використаємо формули (2.11)–(2.13) і виконаємо перетворення:

$$\Delta = q^2 - 3pr = \left(3c^2 + 2(x+2y)c + (x+y)\,y\right)^2 -$$
$$- 3(3c + (x+2y))\left(c^3 + (x+2y)c^2 + (x+y)\,yc\right) =$$
$$= 9c^4 + 4(x+2y)^2\cdot c^2 + (x+y)^2y^2 +$$
$$+ 12(x+2y)\cdot c^3 + 6(x+y)\,y\cdot c^2 + 4(x+2y)(x+y)\,y\cdot c -$$
$$- 9c^4 - 3(x+2y)\cdot c^3 - 9(x+2y)\cdot c^3 -$$
$$- 3(x+2y)^2\cdot c^2 - 9(x+y)\,y\cdot c^2 - 3(x+2y)(x+y)\,y\cdot c =$$
$$= \left((x+2y)^2 - 3(x+y)\,y\right)\cdot c^2 + (x+2y)(x+y)\,y\cdot c + (x+y)^2y^2 =$$
$$= \left(x^2 + xy + y^2\right)\cdot c^2 + (x+2y)(x+y)\,y\cdot c + (x+y)^2y^2 \geqslant 0,$$

оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $c > 0$. Рівність настає, коли $x = y = 0$, тобто при $a = b = c$.

г) Розглянемо різницю $\Delta = 2p^3 + 9r - 7pq$, використаємо формули (2.11)–(2.13) і виконаємо перетворення:

$$\Delta = 2(3c + (x+2y))^3 + 9\left(c^3 + (x+2y)c^2 + (x+y)\,yc\right) -$$
$$- 7(3c + (x+2y))\left(3c^2 + 2(x+2y)\cdot c + (x+y)\,y\right) =$$
$$= 2\left(27c^3 + 27(x+2y)\cdot c^2 + 9(x+2y)^2\cdot c + (x+2y)^3\right) +$$
$$+ 9\left(c^3 + (x+2y)\cdot c^2 + (x+y)\,y\cdot c\right) -$$
$$- (21c + 7(x+2y))\left(3c^2 + 2(x+2y)\cdot c + (x+y)\,y\right) =$$

$$= 54c^3 + 54(x+2y)\cdot c^2 + 18(x+2y)^2\cdot c + 2(x+2y)^3 +$$
$$+ 9c^3 + 9(x+2y)\cdot c^2 + 9(x+y)y\cdot c -$$
$$- 63c^3 - 42(x+2y)c^2 - 21(x+y)y\cdot c -$$
$$- 21(x+2y)c^2 - 14(x+2y)^2\cdot c - 7(x+2y)(x+y)y =$$
$$= \big(4(x+2y)^2 - 12(x+y)y\big)\cdot c + \big(2(x+2y)^3 - 7(x+2y)(x+y)y\big) =$$
$$= 4\big(x^2+xy+y^2\big)\cdot c + (x+2y)\big(2x^2+xy+y^2\big) \geqslant 0,$$

оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $c > 0$. Рівність наступає, коли $x = y = 0$, тобто при $a = b = c$.

ґ) Розглянемо різницю $\Delta = p^2q + 3pr - 4q^2$, використаємо формули (2.11)–(2.13) і виконаємо перетворення:

$$\Delta = (3c+(x+2y))^2\big(3c^2+2(x+2y)c+(x+y)y\big) +$$
$$+ 3(3c+(x+2y))\big(c^3+(x+2y)c^2+(x+y)yc\big) -$$
$$- 4\big(3c^2+2(x+2y)c+(x+y)y\big)^2 =$$
$$= \big(9c^2+6(x+2y)c+(x+2y)^2\big)\big(3c^2+2(x+2y)c+(x+y)y\big) +$$
$$+ (9c+3(x+2y))\big(c^3+(x+2y)c^2+(x+y)yc\big) -$$
$$- 4\big(9c^4+4(x+2y)^2c^2+(x+y)^2y^2 +$$
$$+12(x+2y)c^3+6(x+y)yc^2+4(x+2y)(x+y)yc\big) =$$
$$= 27c^4 + 18(x+2y)\cdot c^3 + 9(x+y)y\cdot c^2 +$$
$$+ 18(x+2y)\cdot c^3 + 12(x+2y)^2\cdot c^2 + 6(x+2y)(x+y)y\cdot c +$$
$$+ 3(x+2y)^2\cdot c^2 + 2(x+2y)^3\cdot c + (x+2y)^2(x+y)y +$$
$$+ 9c^4 + 9(x+2y)\cdot c^3 + 9(x+y)y\cdot c^2 +$$
$$+ 3(x+2y)\cdot c^3 + 3(x+2y)^2\cdot c^2 + 3(x+2y)(x+y)y\cdot c -$$
$$- 36c^4 - 16(x+2y)^2\cdot c^2 - 4(x+y)^2y^2 -$$
$$- 48(x+2y)\cdot c^3 - 24(x+y)y\cdot c^2 - 16(x+2y)(x+y)y\cdot c =$$
$$= \big(9(x+y)y + 12(x+y)^2 + 3(x+2y)^2 + 9(x+y)y +$$
$$+3(x+2y)^2 - 16(x+2y)^2 - 24(x+y)y\big)\cdot c^2 +$$
$$+ \big(6(x+2y)(x+y)y + 2(x+2y)^3 + 3(x+2y)(x+y)y -$$
$$-16(x+2y)(x+y)y)\cdot c +$$
$$+ \big((x+2y)^2(x+y)y - 4(x+y)y\big) =$$

$$= \left(2(x+2y)^2 - 6(x+y)y\right)\cdot c^2 + \left(2(x+2y)^3 - 7(x+2y)(x+y)y\right)\cdot c +$$
$$+ (x+y)y\left((x+2y)^2 - 4(x+y)y\right) =$$
$$= 2\left(x^2+xy+y^2\right)\cdot c^2 + (x+2y)\left(2x^2+xy+y^2\right)\cdot c + (x+y)x^2y \geqslant 0,$$

оскільки $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $c > 0$. Рівність наступає, коли $x = y = 0$, тобто при $a = b = c$. □

Наступні нерівності пропонуємо довести читачам самостійно з використанням вивчених методів доведення симетричних нерівностей від трьох змінних.

Теорема 2.10. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, $p = a+b+c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Доведіть виконання нерівностей:*

д) $pq \geqslant 9r$;
е) $q^3 \geqslant 27r^2$;
є) $p^2q \geqslant 3pr + 2q^2$;
ж) $p^4 + 3q^2 \geqslant 4p^2q$;
з) $pq^2 \geqslant 2p^2r + 3qr$;
и) $2p^3 + 9r^2 \geqslant 7pqr$;
і) $q^3 + 9r^2 \geqslant 4pqr$;
ї) $p^3r + q^3 \geqslant 6pqr$.

Задача 2.42. *Нехай a, b, c — невід'ємні дійсні числа, для яких $a + b + c = 1$. Доведіть, що*

$$7(ab+bc+ca) \leqslant 2 + 9abc.$$

(Великобританія, 1999 р.)

Розв'язання. Степінь лівої частини дорівнює 2, а правої — 3. Використовуючи умову $a + b + c = 1$, перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$7(a+b+c)(ab+bc+ca) \leqslant 2(a+b+c)^3 + 9abc.$$

Нехай $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Тоді нерівність набуває вигляду $2p^3 + 9r \geqslant 7pq$. Остання нерівність нами доведена вище (теорема 2.9, г). □

2.4.4. *Симетрична кубічна нерівність та її застосування*

Цікавим наслідком з нерівності Шура і надзвичайно потужним інструментом для доведення симетричних нерівностей є наступна теорема, яку ми називаємо *симетричною кубічною нерівністю*.

Теорема 2.11 (про симетричну кубічну нерівність). *Нехай $P(u,v,w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $P(1,1,1) \geqslant 0$, $P(1,1,0) \geqslant 0$ і $P(1,0,0) \geqslant 0$, то для будь-яких дійсних невід'ємних x, y та z виконується така нерівність $P(x,y,z) \geqslant 0$.*

Доведення. Оскільки $P(u,v,w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня, то він має такий вигляд:

$$P(u,v,w) = A\sum_{cyc} u^3 + B\sum_{sym} u^2v + Cuvw,$$

де A, B, C — задані дійсні числа. Позначимо через $p = P(1,1,1) = 3A + 6B + C$, $q = P(1,1,0) = A + B$ і $r = P(1,0,0) = A$. Звідси знаходимо, $A = r$, $B = q - r$ і $C = p - 6q + 3r$, де p, q, r — невід'ємні дійсні числа.

Нехай $x, y, z \geqslant 0$, тоді

$$P(x,y,z) = r\sum_{cyc} x^3 + (q-r)\sum_{sym} x^2y + (p - 6q + 3r)xyz.$$

Перепишемо цей вираз у такому вигляді

$$P(x,y,z) = r\left(\sum_{cyc} x^3 + 3xyz - \sum_{sym} x^2y\right) + q\left(\sum_{sym} x^2y - 6xyz\right) + pxyz.$$

Оскільки $\sum\limits_{cyc} x^3 + 3xyz - \sum\limits_{sym} x^2y \geqslant 0$ (це результат задачі 2.34) та $\sum\limits_{sym} x^2y - 6xyz \geqslant 0$ (це результат нерівності Коші), то одержуємо: $P(x,y,z) \geqslant 0$, що і треба було довести[1]. □

Спочатку покажемо застосування симетричної кубічної нерівності до раніше розв'язаної нами задачі.

Задача 2.43. *Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x + y + z = 1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1984 р.)

Розв'язання. Оскільки $x + y + z = 1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$0 \leqslant (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}(x + y + z)^3$$

[1] *Зауваження.* В книжці [**16**] вказується, що результат доведеної теореми належить Ху Джу Лі (Hoo Joo Lee). В цій же книжці доводиться узагальнення кубічної нерівності, в якій умова симетричності многочлена замінюється його циклічністю (циклічна кубічна нерівність), а також поширюється аналогічна ідея на симетричні многочлени із більшою кількістю змінних.

(ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною три). Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо два однорідних симетричних кубічних многочлени:

$$P(u,v,w)=(uv+vw+wu)(u+v+w)-2uvw$$

та

$$Q(u,v,w)=\frac{7}{27}(u+v+w)^3-(uv+vw+wu)(u+v+w)+2uvw.$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1)=7$, $P(1,1,0)=2$, $P(1,0,0)=0$ та $Q(1,1,1)=0$, $Q(1,1,0)=\frac{2}{27}$, $Q(1,0,0)=\frac{7}{27}$ — невід'ємні, то за теоремою про симетричну кубічну нерівність одержуємо, що $P(x,y,z)\geqslant 0$ і $Q(x,y,z)\geqslant 0$ при всіх $x,y,z\geqslant 0$. Звідси при $x+y+z=1$, одержуємо справедливість твердження задачі.

Інші способи розв'язання цієї задачі наведено на сторінках 57 і 81. □

Задача 2.44. *Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x+y+z=1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\geqslant\frac{1}{4}.$$

(США, 1979 р.)

Розв'язання. Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність, еквівалентна такій нерівності

$$x^3+y^3+z^3+6xyz\geqslant\frac{1}{4}(x+y+z)^3$$

(ми «вирівняли» степінь усіх членів нерівності, тобто зробили її рівною три). Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо однорідний симетричний кубічний многочлен:

$$P(u,v,w)=u^3+v^3+w^3+6uvw-\frac{1}{4}(u+v+w)^3.$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1)=\frac{9}{4}$, $P(1,1,0)=0$ і $P(1,0,0)=\frac{3}{4}$ — невід'ємні, то за теоремою про симетричну кубічну нерівність одержуємо, що $P(x,y,z)\geqslant 0$ при всіх $x,y,z\geqslant 0$. Звідси, при $x+y+z=1$, одержуємо справедливість твердження задачі. □

Задача 2.45. *Нехай x, y, z — невід'ємні дійсні числа такі, що $x+y+z=1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$7(xy+yz+zx)\leqslant 2+9xyz.$$

(Великобританія, 1999 р.)

Розв'язання. Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність еквівалентна такій нерівності

$$2(x+y+z)^3-7(x+y+z)(xy+yz+zx)+9xyz\geqslant 0.$$

Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо однорідний симетричний кубічний многочлен:

$$P(u,v,w)=2(u+v+w)^3-7(u+v+w)(uv+vw+wu)+9uvw.$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1)=0$, $P(1,1,0)=2$ і $P(1,0,0)=2$ — невід'ємні, то за теоремою про симетричну кубічну нерівність одержуємо, що $P(x,y,z)\geqslant 0$ при всіх $x,y,z\geqslant 0$, що і треба було довести. □

Наслідком з симетричної кубічної нерівності є аналогічне твердження, де роль змінних відіграють довжини сторін деякого трикутника (теорема Столарскі[1]).

Теорема 2.12. *Нехай $P(u,v,w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $P(1,1,1)\geqslant 0$, $P(1,1,0)\geqslant 0$ і $P(2,1,1)\geqslant 0$, то для будь-яких дійсних невід'ємних чисел a, b та c, які є довжинами сторін деякого трикутника, виконується така нерівність $P(a,b,c)\geqslant 0$.*

Доведення.

Нехай $x=AB_1=AC_1$, $y=BA_1=BC_1$ та $z=CA_1=CB_1$ (див. рис. 2.2), тоді $a=y+z$, $b=x+z$ і $c=x+y$, де x, y, z — додатні дійсні числа. Тоді $x=\frac{1}{2}(-a+b+c)$, $y=\frac{1}{2}(a-b+c)$ і $z=\frac{1}{2}(a+b-c)$. Причому:

- якщо $a=1, b=1, c=1$, то $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$;
- якщо $a=1, b=1, c=0$, то $x=0, y=0, z=1$;
- якщо $a=2, b=1, c=1$, то $x=0, y=1, z=1$.

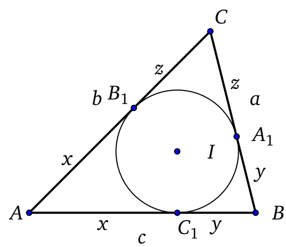


Рис. 2.2.

Оскільки $P(a,b,c)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами, то $Q(x,y,z)=P(y+z,z+x,x+y)$ також

[1] *Stolarsky K. B.* Cubic Triangle Inequalities // Amer. Math. Monthly. — Vol. 78, No. 8. — 1971. — P. 879-881.

однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Крім того,

$$Q(1,1,1) = 8Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8P(1,1,1) \geqslant 0$$

$$Q(1,0,0) = Q(0,0,1) = P(1,1,0) \geqslant 0$$

і

$$Q(1,1,0) = Q(0,1,1) = P(2,1,1) \geqslant 0.$$

Отже, за теоремою 2.11 має місце така нерівність $Q(x,y,z) \geqslant 0$, яка еквівалентна нерівності $P(a,b,c) \geqslant 0$. □

Задача 2.46. *Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника, p — його півпериметр. Доведіть, що виконується нерівність*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{36}{35}\left(p^2 + \frac{abc}{p}\right).$$

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\frac{35}{2}(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 36\left(\frac{1}{8}(a+b+c)^3 + abc\right).$$

Для доведення цієї нерівності розглянемо однорідний симетричний многочлен третього степеня:

$$P(u,v,w) = 35(u+v+w)\left(u^2+v^2+w^2\right) - 9\left((u+v+w)^3 + 8uvw\right).$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1) = 0$, $P(1,1,0) = 68$ і $P(2,1,1) = 120$ — невід'ємні, то за теоремою 2.12 виконується нерівність $P(a,b,c) \geqslant 0$, що і треба було довести. □

2.5. Використання принципу Штурма при розв'язуванні олімпіадних екстремальних задач

В цьому параграфі ми хочемо познайомити читачів з методом розв'язування олімпіадних екстремальних задач, який називається *принципом Штурма*. Цей принцип був розроблений і запропонований у 1884 році німецьким математиком Фрідріхом Отто Рудольфом Штурмом (1841–1919).

Теорію задач на знаходження найбільших і найменших величин називають *теорією екстремальних задач* або *теорією оптимізації*. У цій теорії використовують спеціальну термінологію. Слова maximum та minimum —

латинські. Вони означають «найбільше» та «найменше». Ще два слова латинського походження часто застосовують, коли говорять про задачі на максимум та мінімум. Термін «екстремум» — від латинського extremum, що означає «крайнє» — об'єднує поняття максимум і мінімум (цей термін запропонував використовувати французький математик Е. Дюбуа-Реймон). Крім цього, використовують термін «оптимальний». Він походить від латинського optimus, що означає «найкращий», «досконалий».

Екстремальні проблеми, які виникають в математиці, природознавстві чи в практичній роботі, спочатку ставляться без формул, в термінах тієї області знань, в якій вони виникли. Для того, щоб можна було скористатися загальною теорією, необхідно здійснювати переклад постановок задач із специфічної мови на мову математики. Такий переклад називають *формалізацією*.

Нижче, при розв'язанні кожної екстремальної задачі, ми покажемо, як здійснюється формалізація. Хочеться відмітити, що одну і ту ж саму задачу можна буде формалізувати по різному. Від того, наскільки вдало формалізована задача, залежить і успіх її розв'язання. Формалізація — це мистецтво. Цьому потрібно навчатися, краще всього — розв'язуючи практичні задачі.

Таким чином, формалізувати екстремальну задачу — це означає точно описати функцію (позначатимемо її через f), екстремальне значення якої потрібно знайти, і вказати обмеження на її аргументи (позначатимемо його через D). Обмеження задається зазвичай рівностями і нерівностями.

Для формалізації задачі: «знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$ при умові, що $x \in D$» будемо вживати скорочений запис:

$$f(x) \to \max(\min) \quad \text{для } x \in D. \tag{2.14}$$

Точки із D називаються *допустимими*. Допустима точка $\hat{x}$ із D називається *абсолютним максимумом (мінімумом)* в задачі (2.14), якщо $f(x) \leqslant f(\hat{x})$ (відповідно $f(x) \geqslant f(\hat{x})$) для будь-якого x із D. Абсолютний максимум (мінімум) задачі (2.14) будемо називати розв'язком екстремальної задачі. Знайти розв'язок задачі і буде нашою ціллю.

Отже, перейдемо до опису принципу Штурма.

Нехай маємо функцію $f(x)$, що визначена на множині D, яка є підмножиною в $\mathbb{R}^n$, і точку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, що належить D. Тоді справедливим буде таке твердження.

Твердження 1. *Нехай виконується умови:*

1) функція f має максимум (мінімум) на множині D;

2) для довільного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ із множини D, яке не співпадає з $\hat{x}$, значення $f(x)$ можна збільшити (зменшити).

Тоді точка $\hat{x}$ є точкою максимуму (мінімуму) функції f.

Це твердження і називають **принципом Штурма**. Із нього випливатиме, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \geqslant f(\hat{x})$ ($f(x) \leqslant f(\hat{x})$), тобто екстремальна задача буде розв'язаною.

Проаналізуємо детальніше цей принцип.

1) Спочатку потрібно з'ясувати, чи матиме задана функція f максимум або мінімум. Для цього, слід розібратися з множиною D допустимих точок функції f. Ця множина D часто складається із тих точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для яких виконуються деякі задані рівності $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ і нерівності $g_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Говорять, що виконання цих рівнянь та нерівностей забезпечують *замкненість множини* D.

Крім того, говорять, що множина D називається *обмеженою*, якщо існує така константа $A > 0$, що $|x_i| \leqslant A$, $i = 1, 2, \ldots, n$ для будь-якої точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ із D.

Наступна класична теорема математичного аналізу дає певну умову існування екструмуму функції.

Теорема 2.13 (Вейєрштрасса[1]). *Нехай в задачі* (2.14) *функція f неперервна, а сукупність D допустимих для неї точок замкнена і обмежена. Тоді розв'язок обох задач* (2.14) *існує.*

Як бачимо, доведення існування екстремального значення функції часто виявляється досить важким. Проте існування можна обґрунтувати й за означенням точки абсолютного максимуму (мінімуму), якщо відома можлива відповідь. Саме так ми і діятимемо в усіх розглянутих нижче задачах.

2) Процес знаходження екстремального значення $f(\hat{x})$ нам потрібно буде розбивати на послідовні етапи, на кожному із яких ми відслідковуватимемо зміну не усіх змінних аргументу, а лише двох із них, що пов'язані між собою спеціальною умовою. Крім того, перед цим, ми повинні сформулювати і довести таке твердження (його називають *заготовкою*) про «зближення» двох аргументів, чи їх «розсовування», щоб з його допомогою доводилося, що значення функції в кожній новій точці буде «ближче» до $f(\hat{x})$, ніж значення у попередній точці. При цьому кожна нова точка повинна мати все більше спільних координат з точкою $\hat{x}$. Оскільки кількість координат кожної точки із D дорівнює n, то такий процес «наближення» до екстремуму є скінченним, і завершує доведення того, що $f(\hat{x})$ — екстремальне значення функції f.

[1] *Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс* (1815–1897) — німецький математик.

А тепер перейдемо до розв'язування олімпіадних екстремальних задач за описаним вище методом.

Задача 2.47. *Нехай* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *додатні дійсні числа,* $n \geqslant 2$, *такі, що* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. *Доведіть, що*

$$\frac{x_1}{1+x_2+\ldots+x_n} + \frac{x_2}{1+x_1+\ldots+x_n} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

(Балканська математична олімпіада, 1984)

Розв'язання. *Формалізація.* Перепишемо дану нерівність у вигляді

$$\frac{x_1}{2-x_1} + \frac{x_2}{2-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{2-x_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}, \tag{2.15}$$

і визначимо функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{2-x_1} + \frac{x_2}{2-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{2-x_n}.$$

З умови задачі випливає, що ця функція визначена на підмножині D множини $\mathbb{R}^n$, яка складається з точок, координати яких додатні і їх сума дорівнює 1, тобто

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \quad x_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ми хочемо довести, що на цій множині точок наша функція набуває значень, які більші або рівні $\frac{n}{2n-1}$. Легко перевірити, що значення $\frac{n}{2n-1}$ досягається для точки $\hat{x} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, яка належить D.

Застосуємо принцип Штурма.

Заготовка. При «зближенні» двох різних дійсних чисел α і β, $(0 < \alpha, \beta < 1)$ так, щоб їх сума залишалася сталою, значення виразу

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} + \frac{\beta}{2-\beta}$$

буде зменшуватися.

Доведення. Оскільки заданий вираз є симетричним, то не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\alpha < \beta$. Нехай ε — таке дійсне число, що $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$. Замінимо число α на $\alpha + \varepsilon$, а число β на $\beta - \varepsilon$. Тоді сума нових чисел дорівнює сумі попередніх: $(\alpha + \varepsilon) + (\beta - \varepsilon) = \alpha + \beta$. Крім того, $0 < \alpha < \alpha + \varepsilon < \beta < 1$ і $0 < \alpha < \beta - \varepsilon < \beta < 1$. Далі потрібно довести, що

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} + \frac{\beta}{2-\beta} > \frac{\alpha+\varepsilon}{2-\alpha-\varepsilon} + \frac{\beta-\varepsilon}{2-\beta+\varepsilon}.$$

Оскільки

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} + \frac{\beta}{2-\beta} = \frac{\alpha(2-\beta)+\beta(2-\alpha)}{(2-\alpha)(2-\beta)} = \frac{2(\alpha+\beta)-2\alpha\beta}{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta},$$

то остання нерівність еквівалентна такій нерівності:

$$\frac{2(\alpha+\beta)-2\alpha\beta}{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta} > \frac{2(\alpha+\beta)-2(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)}{4-2(\alpha+\beta)+(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)}.$$

Щоб довести цю нерівність, потрібно довести, що чисельник дробу, який стоїть у лівій частині цієї нерівності, більший за чисельних дробу, який стоїть у правій її частині, а його знаменник відповідно менший за знаменник у правій частині. Крім того, потрібно показати, що ці чисельники і знаменники — додатні.

Дійсно,

$$2(\alpha+\beta)-2\alpha\beta>2(\alpha+\beta)-2(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon) \quad\Leftrightarrow\quad (\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)>\alpha\beta,$$

$$4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta<4-2(\alpha+\beta)+(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon) \quad\Leftrightarrow\quad (\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)>\alpha\beta,$$

а далі

$$(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)>\alpha\beta \quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon(\beta-\alpha)-\varepsilon^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon((\beta-\alpha)-\varepsilon)>0,$$

бо $0<\varepsilon<\beta-\alpha$.

Крім того,

$$4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(2-\alpha)(2-\beta)>0$$

і

$$2(\alpha+\beta)-2(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)=(a+\varepsilon)(2-(b-\varepsilon))+(b-\varepsilon)(2-(a+\varepsilon))>0,$$

бо $0<\alpha<\alpha+\varepsilon<\beta<1$ і $0<\alpha<\beta-\varepsilon<\beta<1$.

Процес наближення. Нехай $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$, $x\neq\hat{x}$. Тоді серед чисел x_1, x_2,…, x_n є два числа, одне із яких більше $\frac{1}{n}$, а друге менше $\frac{1}{n}$. Це випливає з того, що

$$\min\{x_1,\ldots,x_n\}\leqslant\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\leqslant\max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Не порушуючи загальності будемо вважати, що це числа x_1 і x_2, причому $x_1<\frac{1}{n}$ і $x_2>\frac{1}{n}$. Замінимо x_1 на $\frac{1}{n}$, а x_2 на $x_1+x_2-\frac{1}{n}$, одержимо нову точку

$$x'=\left(\frac{1}{n},x_1+x_2-\frac{1}{n},x_3,\ldots,x_n\right),$$

яка належить до множини D (її координати додатні, а їх сума дорівнює 1). Використовуючи ***заготовку*** одержуємо, що $f(x)>f(x')$. Далі, діючи із точкою x' аналогічно, як із точкою x, ми перейдемо до точки x'', у якої будуть рівними $\frac{1}{n}$, щонайменше дві її координати, і при цьому буде виконується нерівність $f(x')>f(x'')$ (її справедливість забезпечує заготовка). Далі, діючи так само щонайбільше $n-1$ разів, ми прийдемо до точки, у якій $n-1$ координат дорівнюють по $\frac{1}{n}$, а n-та координата дорівнює $1-(n-1)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$, тобто прийдемо до точки $\hat{x}$.

Таким чином, для $x \neq \hat{x}$ виконується нерівність $f(x) > f(\hat{x})$, а для усіх $x \in D$ виконується така нерівність $f(x) \geqslant f(\hat{x})$, що і треба було довести.

Нагадаємо, що інший спосіб розв'язання цієї задачі було розглянуто в розділі 2.1 (задача 2.16 на сторінці 35). □

Задача 2.48. *Нехай* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— такі дійсні числа, що* $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}$, *для* $1 \leqslant i \leqslant n$. *Доведіть, що*

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n} \leqslant \frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{((1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n))^n}.$$

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Індія, 2004)

Розв'язання. *Формалізація.* Перепишемо дану нерівність у вигляді:

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)} \leqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}{(n-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n))^n}. \tag{2.16}$$

Якщо зафіксувати суму $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, то права частина нерівності (2.16) буде сталою і буде дорівнювати $\left(\frac{S}{n-S}\right)^n$.

Визначимо функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{1-x_1} \cdot \frac{x_2}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{1-x_n}.$$

З умови задачі випливає, що ця функція визначена на підмножині D множини $\mathbb{R}^n$, яка складається з точок, координати яких додатні і не перевищують $\frac{1}{2}$, а їх сума дорівнює додатному числу S, тобто на

$$D = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S,\ 0 < S \leqslant \frac{n}{2},\ 0 < x_i \leqslant \frac{1}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Ми хочемо довести, що на цій множині точок наша функція набуває значень, які менші або рівні $\left(\frac{S}{n-S}\right)^n$. Легко перевірити, що значення $\left(\frac{S}{n-S}\right)^n$ досягається для точки $\hat{x} = \left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, \ldots, \frac{S}{n}\right)$, яка належить D.

Застосуємо принцип Штурма.

Заготовка. При «зближенні» двох різних дійсних чисел α і β, $\left(0 < \alpha, \beta \leqslant \frac{1}{2}\right)$ так, щоб їх сума залишалася сталою, значення виразу

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\beta}{1-\beta}$$

буде збільшуватися.

Доведення. Оскільки заданий вираз є симетричним, то не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\alpha < \beta$. Нехай ε — таке дійсне число, що $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$. Замінимо число α на $\alpha + \varepsilon$, а число β на $\beta - \varepsilon$. Тоді сума нових чисел дорівнює сумі попередніх: $(\alpha + \varepsilon) + (\beta - \varepsilon) = \alpha + \beta$. Крім того,

$0<\alpha<\alpha+\varepsilon<\beta\leqslant\frac{1}{2}$ і $0<\alpha<\beta-\varepsilon<\beta\leqslant\frac{1}{2}$. Далі потрібно довести, що

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\beta}{1-\beta}<\frac{\alpha+\varepsilon}{1-\alpha-\varepsilon}\cdot\frac{\beta-\varepsilon}{1-\beta+\varepsilon}.$$

Оскільки

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\beta}{1-\beta}=\frac{\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=1-\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta},$$

то ця нерівність перепишеться так:

$$1-\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}<1-\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)}.$$

Оскільки $\alpha+\beta<1$, то $1-(\alpha+\beta)>0$. Тому далі матимемо еквівалентні нерівності:

$$\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}>\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)+(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)},$$
$$\frac{1}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}>\frac{1}{1-(\alpha+\beta)+(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)},$$
$$(\alpha+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)>\alpha\beta.$$

Остання нерівність є правильною і доведена в попередній задачі.

Процес наближення. Нехай $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$, $x\neq\hat{x}$. Тоді серед чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n є два числа, одне із яких більше $\frac{S}{n}$, а друге менше $\frac{S}{n}$. Не порушуючи загальності будемо вважати, що це числа x_1 і x_2, причому $x_1<\frac{S}{n}$ і $x_2>\frac{S}{n}$. Замінимо x_1 на $\frac{S}{n}$, а x_2 на $x_1+x_2-\frac{S}{n}$, одержимо нову точку $x'=\left(\dfrac{S}{n},x_1+x_2-\dfrac{S}{n},x_3,\ldots,x_n\right)$, яка належить до множини D (її координати лежать в зазначених межах, а їх сума дорівнює 1). Використовуючи ***заготовку*** одержуємо, що $f(x)>f(x')$. Далі, діючи із точкою x' аналогічно, як із точкою x, ми перейдемо до точки x'', у якої будуть рівними $\frac{S}{n}$, щонайменше дві її координати, і при цьому буде виконується нерівність $f(x')>f(x'')$ (її справедливість забезпечує заготовка). Далі, діючи так само щонайбільше $n-1$ разів, ми прийдемо до точки, у якій $n-1$ координат дорівнюють по $\frac{S}{n}$, а n-та координата дорівнює $S-(n-1)\cdot\frac{S}{n}=\frac{S}{n}$, тобто прийдемо до точки $\hat{x}$. Це і завершує доведення заданої нерівності. □

Задача 2.49. *Нехай r_1, r_2, $\ldots$, r_n — додатні дійсні числа, $n\geqslant 2$, причому $r_i\geqslant 1$, для усіх $i=1,2,\ldots,n$. Доведіть, що*

$$\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{1+r_2}+\ldots+\frac{1}{1+r_n}\geqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{r_1r_2\ldots r_n}}.$$

(ММО, Short List, 1998)

Розв'язання. ***Формалізація.*** Позначимо $\sqrt[n]{r_1 r_2 \dots r_n} = d$, $d \geqslant 1$. Визначимо функцію

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}.$$

З умови задачі випливає, що ця функція визначена на підмножині D множини $\mathbb{R}^n$, яка складається з точок, координати яких більші або рівні за 1 і їх добуток дорівнює d, $d \geqslant 1$, тобто на

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 x_2 \dots x_n = d, d \geqslant 1, x_i \geqslant 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Ми хочемо довести, що на цій множині точок наша функція набуває значень, які більші або рівні $\frac{n}{1+d}$. Легко перевірити, що значення $\frac{n}{1+d}$ досягається для точки $\hat{x} = (d, d, \dots, d)$, яка належить D.

Застосуємо принцип Штурма.

Заготовка 1. При «зближенні» двох різних дійсних чисел α і β, $(\alpha, \beta > 0)$ так, щоб їх добуток залишався сталим, значення виразу $\alpha + \beta$ буде зменшуватися.

Доведення. Оскільки заданий вираз є симетричним, то не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\alpha < \beta$. Нехай ε таке дійсне число, що $1 < \varepsilon < \frac{\beta}{\alpha}$. Замінимо число α на $\varepsilon\alpha$, а число β на $\frac{\beta}{\varepsilon}$. Тоді добуток нових чисел дорівнює добутку попередніх: $\varepsilon\alpha \cdot \frac{\beta}{\varepsilon} = \alpha\beta$. Крім того, $0 < \alpha < \varepsilon\alpha < \beta$ і $0 < \alpha < \frac{\beta}{\varepsilon} < \beta$. Далі потрібно довести, що

$$\alpha + \beta > \varepsilon\alpha + \frac{\beta}{\varepsilon}.$$

Ця нерівність рівносильна наступній:

$$\frac{(\varepsilon - 1)(\beta - \varepsilon\alpha)}{\varepsilon} > 0,$$

яка є правильною при вказаних обмеженнях.

Заготовка 2. При «зближенні» двох різних дійсних чисел α і β, $(\alpha, \beta \geqslant 1)$ так, щоб їх добуток залишався сталим, значення виразу

$$\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta}$$

буде зменшуватися.

Доведення. Оскільки заданий вираз є симетричним, то не порушуючи загальності, будемо вважати, що $1 \leqslant \alpha < \beta$. Нехай ε таке дійсне число, що $1 < \varepsilon < \frac{\beta}{\alpha}$. Замінимо число α на $\varepsilon\alpha$, а число β на $\frac{\beta}{\varepsilon}$. Тоді добуток нових чисел дорівнює добутку попередніх: $\varepsilon\alpha \cdot \frac{\beta}{\varepsilon} = \alpha\beta$. Крім того, $0 < \alpha < \varepsilon\alpha < \beta$ і $0 < \alpha < \frac{\beta}{\varepsilon} < \beta$. Далі потрібно довести, що

$$\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} > \frac{1}{1+\varepsilon\alpha} + \frac{1}{1+\frac{\beta}{\varepsilon}}.$$

Оскільки
$$\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}=1-\frac{\alpha\beta-1}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta},$$
то ця нерівність рівносильна таким нерівностям:
$$1-\frac{\alpha\beta-1}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}>1-\frac{\alpha\beta-1}{1+\left(\varepsilon\alpha+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)+\alpha\beta},$$
$$\frac{\alpha\beta-1}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}<\frac{\alpha\beta-1}{1+\left(\varepsilon\alpha+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)+\alpha\beta}.$$
Оскільки $1\leqslant\alpha<\beta$, то $\alpha\beta-1>0$. Тому остання нерівність рівносильна таким нерівностям:
$$1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta>1+\left(\varepsilon\alpha+\frac{\beta}{\varepsilon}\right)+\alpha\beta,$$
$$\alpha+\beta>\varepsilon\alpha+\frac{\beta}{\varepsilon},$$
а ця нерівність доведена в заготовці 1.

Процес наближення. Нехай $x=(r_1,r_2,\ldots,r_n)\in D$, $x\neq\hat{x}$. Тоді серед чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ є два числа, одне із яких більше d, а друге менше d (це випливає з того, що d — середнє геометричне цих чисел). Не порушуючи загальності будемо вважати, що це числа r_1 і r_2, причому $r_1<d$ і $r_2>d$. Замінимо r_1 на d, а r_2 на $\frac{r_1r_2}{d}$, одержимо нову точку $x'=\left(d,\frac{r_1r_2}{d},r_3,\ldots,r_n\right)$, яка належить до множини D (її координати лежать в зазначених межах, а їх добуток дорівнює d). Використовуючи заготовки одержуємо, що $f(x)>f(x')$. Далі, діючи із точкою x' аналогічно, як із точкою x, ми перейдемо до точки x'', у якої будуть рівними d, щонайменше дві її координати, і при цьому буде виконується нерівність $f(x')>f(x'')$ (її справедливість забезпечують заготовки). Далі, діючи так само щонайбільше $n-1$ разів, ми прийдемо до точки, у якій $n-1$ координат дорівнюють по d, а n-та координата дорівнює $\frac{d^n}{d^{n-1}}=d$, бо $\sqrt[n]{d\cdot d\cdot\ldots\cdot d\cdot\hat{r}_n}=d$, тобто прийдемо до точки $\hat{x}$. Це і завершує доведення потрібної нам нерівності. □

Задача 2.50. *Нехай a, b, c дійсні невід'ємні числа такі, що $a+b+c=1$. Доведіть, що*
$$4(ab+bc+ca)-9abc\leqslant 1.$$
(Журнал «Mathematical Reflections», T. Andreescu)

Розв'язання. *Формалізація.* Розглянемо функцію
$$f(x,y,z)=4(xy+yz+zx)-9xyz-1,$$

яка визначена на множині

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1, x + y + z = 1\right\}.$$

Оскільки множина D замкнена і обмежена, а функція $f(x, y, z)$ — неперервна, то за теоремою Вейєрштрасса вона має максимум. Нехай $\hat{x} = (a, b, c)$ — точка із D, в якій f досягає максимуму. Оскільки наша функція є симетричною, то не порушуючи загальності будемо вважати, що $a \geqslant b \geqslant c$. Тоді можемо стверджувати, що $a \geqslant \frac{1}{3}$ і $c \leqslant \frac{1}{3}$.

Застосуємо принцип Штурма.

Заготовка. Нехай $b < a$ і $0 < \varepsilon < a - b$. Тоді $f(a-\varepsilon, b+\varepsilon, c) > f(a, b, c)$.

Доведення. Ця нерівність еквівалентна такій нерівності:

$$4(a-\varepsilon)(b+\varepsilon) - 9(a-\varepsilon)(b+\varepsilon)c > 4ab - 9abc,$$

або

$$(4-9c)\left((a-b)\varepsilon - \varepsilon^2\right) > 0.$$

Ця остання нерівність є правильною, бо $c \leqslant \frac{1}{3}$ і $0 < \varepsilon < a - b$.

Доведена щойно заготовка вказує на те, що $a = b$. Тоді $c = 1 - 2a$, і залишається довести, що $f(a, a, 1-2a) \leqslant 0$, де $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Це означає, що потрібно довести нерівність:

$$4a^2 + 8a(1-2a) - 9a^2(1-2a) - 1 \leqslant 0.$$

Розкриваючи дужки в лівій частині цієї нерівності і розкладаючи її на множники, одержуємо: $-(1-2a)(3a-1)^2 \leqslant 0$. Ця нерівність при $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ є правильною. Тому запропоновану нерівність доведено. Крім того, ми одержали, що рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли два із трьох даних чисел дорівнюють по $\frac{1}{2}$, а третє дорівнює 0, або коли усі три числа дорівнюють по $\frac{1}{3}$. □

Задача 2.51. *Нехай a, b, c — невід'ємні дійсні числа такі, що $a + b + c = 1$. Доведіть, що*

$$0 \leqslant ab + bc + ca - 2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1984)

Розв'язання. Перша нерівність випливатиме з таких нерівностей: $ab \geqslant abc$ і $bc \geqslant abc$. Для доведення другої розглянемо функцію:

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz,$$

яка визначена на $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1, x + y + z = 1\right\}$.

Заготовка. Нехай $\hat{x} = (a, b, c)$ — точка із D, в якій $f(x, y, z)$ досягає максимуму. Нехай $a \leqslant b \leqslant c$, причому $a < c$ і $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{3} - a, c - \frac{1}{3}\right) > 0$. Тоді

$$f(a+\varepsilon, b, c-\varepsilon) = f(a, b, c) + \varepsilon(1-2b)((c-a)-\varepsilon).$$

Оскільки $b \leqslant c$ і $a + b + c = 1$, то $b \leqslant \frac{1}{2}$. Отже, $f(a+\varepsilon, b, c-\varepsilon) \geqslant f(a, b, c)$. Звідки за принципом Штурма

$$f(x, y, z) \leqslant f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

Інше доведення цієї нерівності з використанням симетричної кубічної нерівності наведено на сторінці 69 (задача 2.43). □

Задача 2.52. *Нехай* x_1, x_2, …, x_n *— різні натуральні числа* ($n \geqslant 2$)*. Доведіть, що*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{2n+1}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Румунія, 1999)

Розв'язання. *Формалізація.* Перепишемо задану нерівність у вигляді

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \geqslant \frac{2n+1}{3}.$$

Саме в такому вигляді ця нерівність була запропонована учасникам Всеукраїнської олімпіади юних математиків у 1981 році.

Оскільки ліва частина цієї нерівності є симетричною, то не порушуючи загальності будемо вважати, що $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. А тому розглянемо функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},$$

яка визначена на множині

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ми хочемо довести, що на цій множині точок наша функція набуває значень, які більші або рівні $\frac{2n+1}{3}$. Легко перевірити, що значення $\frac{2n+1}{3}$ досягається для точки $\hat{x} = (1, 2, \ldots, n)$, яка належить D.

Застосуємо принцип Штурма.

Нехай найменше значення функції f досягається для точки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка належить D. Зрозуміло, що $y_n - y_1 \geqslant n - 1$.

Якщо $y_n - y_1 > n$, то знайдуться такі числа i та j, $i < j$, що точка $\left(y_1, \ldots, y_i + 1, \ldots, y_j - 1, \ldots, y_n\right)$ буде належати D. При цьому буде виконуватися нерівність

$$f\left(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_j, \ldots, y_n\right) > f\left(y_1, \ldots, y_i + 1, \ldots, y_j - 1, \ldots, y_n\right),$$

бо знаменник виразу f залишиться сталим, а чисельник зменшиться на величину $2\left(y_j - y_i - 1\right) > 0$, що суперечитиме припущенню про точку $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Якщо $y_n - y_1 = n$, то це означає, що відстань між будь-якими двома сусідніми координатами точки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, крім якихось двох, дорівнює 1, а між цими двома відстань дорівнює 2. Це означає, що існують такі натуральні числа a і k, $1 \leqslant k < n$, що $y_1 = a$, $y_2 = a+1, \ldots, y_k = a+k-1$, $y_{k+1} = a+k+1$, $\ldots, y_n = n$. Тоді

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{a^2 + \ldots + (a+k-1)^2 + (a+k+1)^2 + \ldots + (a+n)^2}{a + \ldots + (a+k-1) + (a+k+1) + \ldots + (a+n)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (a+i)^2 - (a+k)^2}{\sum\limits_{i=0}^{n} (a+i) - (a+k)} = \frac{na^2 + 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - k\right)a + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - k^2}{na + \frac{n(n+1)}{2} - k}.$$

Віднявши від цього виразу число $\frac{2n+1}{3}$, одержимо:

$$\frac{na^2 + 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - k\right)a + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - k^2}{na + \frac{n(n+1)}{2} - k} - \frac{2n+1}{3} =$$

$$= \frac{na^2 + 2\left(\frac{n(n+2)}{6} - k\right)a - k^2 + \frac{2n+1}{3}k}{na + \frac{n(n+1)}{2} - k}.$$

При $a \geqslant 1$ і $1 \leqslant k \leqslant n$ знаменник цього дробу додатний, а чисельник буде найменшим, коли $a = 1$ і $k = n$. І тільки при цих умовах він дорівнює 0. Оскільки в цьому випадку $1 \leqslant k < n$, то значення останнього дробу буде додатним, що суперечитиме припущенню про точку $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Якщо ж $y_n - y_1 = n - 1$, то для деякого натурального a маємо: $y_1 = a$, $y_2 = a+1, \ldots, y_n = a+n-1$. У цьому випадку

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{a^2 + (a+1)^2 + \ldots + (a+n-1)^2}{a + (a+1) + \ldots + (a+n-1)} =$$

$$= \frac{na^2 + 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1} i \cdot a + \sum\limits_{i=1}^{n-1} i^2}{na + \sum\limits_{i=1}^{n-1} i} = \frac{na^2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \cdot a + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}}{na + \frac{(n-1)n}{2}} =$$

$$= \frac{a^2 + (n-1) \cdot a + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}}{a + \frac{n-1}{2}}.$$

При $a = 1$ значення останнього виразу дорівнює $\frac{2n+1}{3}$. Віднявши від цього виразу число $\frac{2n+1}{3}$, одержимо:

$$\frac{a^2 + \frac{n-4}{3}a - \frac{n-1}{3}}{a + \frac{n-1}{2}} > 0$$

при $a > 1$, бо квадратний тричлен в чисельнику останнього виразу зростає при $a > 1$. Отже, у цьому випадку, при $a > 1$, ми одержуємо суперечність з припущенням про точку $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тому залишається лише один випадок: $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \hat{x}$. □

Задача 2.53. *Доведіть, що серед усіх трикутників, вписаних у заданий еліпс, найбільшу площу матимуть ті і тільки ті трикутники, для яких їх точка перетину медіан співпадає з центром еліпса.*

(XII W. L. Putnam Mathematical Competition, 1952)

Розв'язання. *Формалізація*. За допомогою паралельного проектування, спроектуємо площину, в якій лежить даний еліпс, на іншу площину так, щоб проекцією еліпса було коло. Оскільки площі усіх фігур, які лежать у площині еліпса множаться на один і той самий сталий множник, а саме на косинус кута між площиною еліпса і площиною проекції, то задача зводиться до пошуку усіх трикутників максимальної площі, що вписані в задане коло. При цьому усі вони будуть правильними, бо при такому проектуванні центр еліпса проектується в центр кола, а точка перетину медіан трикутника проектується в точку перетину медіан проекції (трикутник, у якого центр описаного кола співпадає з точкою перетину медіан, буде правильним).

Застосуємо метод Штурма. Розглянемо трикутник, відмінний від правильного, який вписаний в задане коло.

Якщо він не гострокутний, то його площа не більша за r^2, де r — радіус заданого кола. Дійсно, нехай ABC — вписаний прямокутний трикутник, у якого $\angle ABC \geqslant 90°$, BH — висота. Розглянемо рівнобедрений прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$, що вписаний в дане коло так, щоб його гіпотенуза A_1C_1 була паралельною до сторони AC даного трикутника (див. мал.2.3). Тоді $AC \leqslant A_1C_1 = 2r$, $BH \leqslant B_1O = r$, а тому

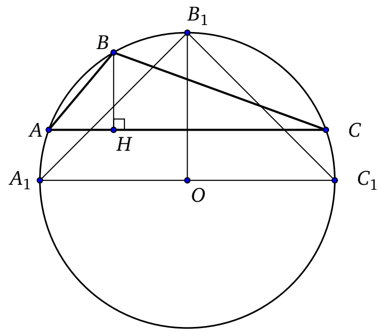


Рис. 2.3.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH \leqslant \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 \cdot B_1O = r^2.$$

Якщо розглянути рівносторонній трикутник, вписаний в дане коло, то його площа буде рівною $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, тобто більшою r^2. А це означатиме, що трикутник ABC не є шуканим.

Якщо трикутник ABC — гострокутний і не рівносторонній, то у нього одна сторона, скажімо AB, буде меншою за сторону a рівностороннього трикутника, який вписаний в дане коло, а друга сторона, скажімо BC, буде більшою a. Тобто $\angle ACB < 60°$, а $\angle CAB > 60°$.

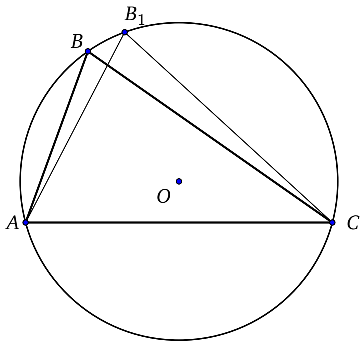


Рис. 2.4.

Будемо переміщувати по колу точку B до тих пір, поки величина кута B_1AC не стане рівною $60°$ (див. мал. 2.4). При цьому, площа трикутника AB_1C стане більшою за площу трикутника ABC (бо відстань від точки B до прямої AC збільшуватиметься при такій зміні). Це означатиме, що трикутник ABC не є шуканим. Розглядатимемо тепер трикутник AB_1C, в якому $\angle CAB_1 = 60°$ і сторона B_1C дорівнює a. Якщо він буде рівностороннім, то ми одержали шуканий трикутник. Припустимо, що це не так, тоді одна із його сторін, скажімо AB_1 менша a, а друга сторона AC більша a, тобто $\angle AB_1C > 60°$, а $\angle ACB_1 < 60°$. Застосувавши до цього трикутника попередню процедуру, одержимо трикутник A_1B_1C, площа якого буде більшою за площу трикутника AB_1C і $\angle A_1B_1C = 60°$, а сторона A_1C буде дорівнювати a. Оскільки $\angle B_1A_1C = \angle B_1AC = 60°$, то трикутник A_1B_1C буде шуканим. Цей процес доводить, що вписані трикутники максимальної площі існують. Застосувавши обернене проектування, ми одержимо, що вписані в еліпс трикутники максимальної площі мають центроїд в центрі еліпса. □

Вправи для самостійного розв'язування

Вправа 1. *Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то*

$$\frac{9}{a+b+c} \leqslant 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).$$

Вправа 2. *Доведіть нерівність*

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geqslant \frac{1}{2},$$

якщо a, b, c, d — додатні числа і $a+b+c+d = 1$.

Вправа 3. *Доведіть нерівність*

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geqslant\frac{3}{2},$$

якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$ *і* $a^2+b^2+c^2=3$.

Вправа 4. *Доведіть, що коли* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *то*

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geqslant 1.$$

Вправа 5. *Доведіть нерівність*

$$\frac{n^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\leqslant\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right),\qquad x_i>0.$$

Вправа 6. *Доведіть, що коли* $x>0$, $y>0$, $z>0$ *і* $x+y+z=1$, *то виконується нерівність*

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\geqslant\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

Вправа 7. *Додатні дійсні числа* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *і* $b_1,b_2,\ldots,b_n$ *такі, що*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=1.$$

Знайдіть найменше можливе значення суми

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}.$$

Вправа 8. *Доведіть, що коли* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *то*

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Вправа 9. *Доведіть, що для будь-якого* α *і* $\beta\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, *виконується така нерівність*

$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}\geqslant 1.$$

Вправа 10. *Нехай* a, b, c *— додатні дійсні числа, сума яких дорівнює* 3. *Доведіть, що*

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geqslant 3.$$

Вправа 11. *Нехай* a, b, c *— додатні дійсні числа, сума яких дорівнює* 3. *Доведіть, що*

$$\frac{1}{1+2b^2c}+\frac{1}{1+2c^2a}+\frac{1}{1+2a^2b}\geqslant 1.$$

Вправа 12. *Нехай* a, b, c, d *— невід'ємні дійсні числа, сума яких дорівнює* 4. *Доведіть, що*

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2}+\frac{1+bc}{1+c^2d^2}+\frac{1+cd}{1+d^2a^2}+\frac{1+da}{1+a^2b^2}\geqslant 4.$$

Вправа 13. *Нехай a, b, c — додатні числа, сума квадратів яких дорівнює 3. Доведіть, що*

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geqslant 1.$$

Вправа 14. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — додатні числа, $s=a_1+\ldots+a_n$. Доведіть нерівність*

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{s-a_n}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Вправа 15. *Знайти найменше значення виразу при $0<x<\frac{\pi}{2}$*

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

Вправа 16. *Доведіть, що для всіх додатних дійсних чисел a, b, c виконується така нерівність*

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geqslant 9(ab+bc+ca).$$

(Азійська тихоокеанська математична олімпіада, 2004 р.)

Вправа 17. *Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2>a^3+b^3+c^3+2abc.$$

Вправа 18. *Нехай x, y, z — такі невід'ємні дійсні числа, що $xy+yz+zx=1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Вправа 19. *Нехай x, y, z — такі додатні дійсні числа, що $xyz\geqslant 1$. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5+z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 0.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 2005 р.)

Вправа 20. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3.$$

(Математична олімпіада США, 2002 р.)

Вправа 21. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geqslant\frac{3}{5}.$$

(Математична олімпіада Японії, 1997 р.)

Вправа 22. *Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника, p — його півпериметр. Доведіть, що виконуються такі нерівності:*

а) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 48(p-a)(p-b)(p-c)$.

б) $\dfrac{15}{4}\leqslant\dfrac{p+a}{b+c}+\dfrac{p+b}{c+a}+\dfrac{p+c}{a+b}<\dfrac{9}{2}$.

Вправа 23. *Доведіть, що для кутів гострокутного трикутника ABC виконується така нерівність*

$$\operatorname{ctg}^3 A+\operatorname{ctg}^3 B+\operatorname{ctg}^3 C+6\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C \geqslant \operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C.$$

Вправа 24. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$IA^2+IB^2+IC^2 \geqslant \frac{BC^2+CA^2+AB^2}{3}.$$

(Корея, 1998 р.)

Вправа 25. *Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що виконується така нерівність*

$$2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 3\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right).$$

Вправа 26. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — додатні дійсні числа, $n \geqslant 2$, такі, що $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Доведіть, що*

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

(Журнал «Квант», №1, 1981)

Вправа 27. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — додатні дійсні числа, $n \geqslant 2$, такі, що $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Доведіть, що*

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}.$$

(Журнал «Квант», №1, 1981)

Вправа 28. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — додатні дійсні числа, $n \geqslant 2$, такі, що $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Доведіть, що*

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

(Журнал «Квант», №1, 1981)

Вправа 29. *Нехай $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — додатні дійсні числа, $n \geqslant 2$, причому $r_i < 1$, для усіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доведіть, що*

$$\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{1+r_2}+\ldots+\frac{1}{1+r_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{r_1r_2\ldots r_n}}.$$

(Журнал «Квант», №1, 1981)

Вправа 30. *Дано натуральне число n. Знайдіть найменше значення виразу*

$$\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

при умові, що $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно різні натуральні числа.

(«American Mathematical Monthly»)

Вказівка. Нехай $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, тоді

$$\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{x_1+x_2+\ldots+x_n} > \frac{x_n^3}{nx_n} = \frac{x_n^2}{n} \to +\infty,$$

при $x_n \to +\infty$. Це означає, що найменше значення даного виразу існує. Припустивши, що воно досягається в точці $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, повторюючи кроки задачі 2.52, ми прийдемо до висновку, що воно досягається в точці $(1, 2, \ldots, n)$ і дорівнює $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Вправа 31. *Доведіть, що для n невід'ємних дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сума яких дорівнює n, виконується нерівність*

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_n^2}\leqslant\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}.$$

(Всеукраїнська математична олімпіада, 1989)

Вправа 32. *Доведіть, що серед усіх трикутників заданої площі найменший периметр має правильний трикутник.*

(Журнал «Квант», №1, 1981)

Розділ 3

Многочлени на математичних олімпіадах

3.1. Рівність і подільність многочленів

Многочленом (від однієї змінної) називають функцію дійсної або комплексної змінної x, яку можна подати у вигляді

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (3.1)$$

де $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — задані числа, причому, якщо $n \geqslant 1$, то $a_n \neq 0$.

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ називаються *коефіцієнтами многочлена* (3.1). Число a_0 називається *вільним членом*, а число a_n — *старшим коефіцієнтом (або коефіцієнтом при старшому члені)* цього многочлена. Якщо $n \geqslant 1$, то число n називається *степенем* многочлена $P(x)$ (позначається $\deg(P(x))$. Степінь многочлена $P(x) = a_0$ ($a_0 \neq 0$) вважають рівною 0. Для многочлена $P(x) = 0$ поняття степеня не означено, проте коли говорять про множину многочленів степеня не вище n, то вважають, що многочлен $P(x) = 0$ їй належить.

Достатньо очевидними є такі два твердження.

Теорема 3.1. *Два многочлени*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

будуть рівними (тобто співпадають як функції) тоді і тільки тоді, коли

$$n = m, \quad a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

Рівність многочленів позначається так: $P(x) = Q(x)$ (тут знак $=$, який пов'язує два многочлени, слід розуміти як знак тотожної рівності цих многочленів).

Теорема 3.2. *Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ — довільні многочлени. Тоді:*

а) функція $V(x) = P(x) + Q(x)$ також є многочленом, причому

$$\deg(V(x)) \leqslant \max\{\deg(P(x)),\ \deg(Q(x))\},$$

а коли $\deg(P(x)) \neq \deg(Q(x))$*, то*

$$\deg(V(x)) = \max(\deg(P(x)),\ \deg(Q(x)));$$

б) функція $W(x) = P(x)Q(x)$ також є многочленом, причому, якщо $P(x) \not\equiv 0$ і $Q(x) \not\equiv 0$, то $W(x) \not\equiv 0$ і

$$\deg(W(x)) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x)).$$

Якщо старший коефіцієнт многочлена дорівнює 1, то такий многочлен називають *зведеним*. Множини многочленів від однієї змінної x з цілими, раціональними, дійсними чи комплексними коефіцієнтами позначають відповідно через $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ чи $\mathbb{C}[x]$.

Число r, для якого $P(r) = 0$, називають *коренем многочлена* $P(x)$, або *коренем рівняння* $P(x) = 0$.

Многочлени, так само як і цілі числа, можна ділити один на одного з остачею. Згадаємо основні означення і теореми із алгебри многочленів.

Теорема 3.3. *Нехай дано два многочлени $P(x)$ і $Q(x)$, причому $Q(x) \not\equiv 0$. Тоді існують єдині многочлени $S(x)$ і $R(x)$, які задовольняють дві умови:*

а) $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$;

б) $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.

При цьому многочлен $R(x)$ називається *остачею* від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, а многочлен $S(x)$ — *неповною часткою*. Якщо $R(x) \equiv 0$, то говорять, що многочлен $P(x)$ *ділиться* на многочлен $Q(x)$. Відшукання многочленів $S(x)$ і $R(x)$ зручно здійснювати з допомогою алгоритму ділення «кутом»: доведення цієї теореми фактично й обґрунтовує таку можливість. Ми тут його не будемо наводити через певну громіздкість (з ним можна ознайомитись, наприклад, в [**6**]).

На основі властивостей ділення комплексних, дійсних, раціональних та цілих чисел, а також із алгоритму ділення «кутом» випливає таке твердження.

Теорема 3.4. *Якщо коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ в умовах теореми 3.3 є комплексними числами, то коефіцієнти многочленів $S(x)$ і $R(x)$ також є комплексними числами.*

Якщо коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ є дійсними числами, то коефіцієнти многочленів $S(x)$ і $R(x)$ також є дійсними числами.

Якщо коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ — раціональні числа, то коефіцієнти многочленів $S(x)$ і $R(x)$ також раціональні числа.

Якщо коефіцієнти многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ — цілі числа, причому коефіцієнт при старшому члені многочлена $Q(x)$ дорівнює 1 чи −1, то коефіцієнти многочленів $S(x)$ і $R(x)$ — також цілі числа.

Теорема 3.5 (Безу[1]). *Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $x - x_0$ дорівнює числу $P(x_0)$.*

[1] *Ет'єн Безу* (1730–1783) — французький математик.

Доведення. Оскільки степінь двочлена $x - x_0$ дорівнює 1, то степінь остачі повинен дорівнювати нулю, тобто шукана остача — це деяке число r. Тоді для будь-якого дійсного x:

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + r.$$

Поклавши в цій рівності $x = x_0$, знаходимо $P(x_0) = r$. □

Із теореми Безу випливає таке твердження.

Теорема 3.6. *Многочлен $P(x)$ ділиться на двочлен $x - x_0$ тоді і тільки тоді, коли x_0 — корінь многочлена $P(x)$.*

Число x_0 називається *коренем многочлена $P(x)$ кратності k* ($k \in \mathbb{N}$), якщо многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $(x - x_0)^k$ і не ділиться на многочлен $(x - x_0)^{k+1}$.

Говорять, що многочлен $P(x)$ має корені $x_1, \ldots, x_n$, якщо кожний із коренів многочлена $P(x)$ повторюється в наборі $(x_1, \ldots, x_n)$ стільки разів, яка його кратність, і жодне число, яке відсутнє в наборі, його коренем не буде.

Наступне твердження є фундаментальним в теорії многочленів. Воно носить назву «основна теорема алгебри многочленів» (або «основна теорема алгебри»). Її доведення неелементарне, а вперше її довів К. Ф. Гаусс[1] у 1799 році.

Теорема 3.7 (Основна теорема алгебри многочленів). *Будь-який многочлен степеня $n \geqslant 1$ має в множині комплексних чисел хоча б один корінь.*

Зазначимо, що основна теорема алгебри многочленів справедлива не лише для многочленів із дійсними коефіцієнтами, але і для многочленів з комплексними коефіцієнтами. Вона дає відповідь на питання про кількість коренів довільного многочлена степеня n, якщо його розглядати над множиною комплексних чисел.

Теорема 3.8 (наслідок з основної теореми алгебри многочленів). *Будь-який многочлен $P(x)$ степеня $n \geqslant 1$ з дійсними або комплексними коефіцієнтами має рівно n комплексних коренів (якщо кожний корінь рахувати стільки разів, якою є його кратність).*

Доведення. Згідно з основною теоремою алгебри многочленів многочлен $P(x)$ має принаймні один корінь в множині комплексних чисел. Нехай x_1 — це корінь многочлена $P(x)$. Тоді за теоремою 3.6 $P(x)$ ділиться на двочлен $x - x_1$, тобто $P(x) = (x - x_1)Q(x)$, причому $Q(x)$ — це многочлен степеня $n - 1$ (взагалі кажучи, з комплексними коефіцієнтами).

---

[1] *Йоганн Карл Фрідріх Гаусс* (1777–1855) — видатний німецький математик.

Повторюючи аналогічні міркування для многочлена $Q(x)$, індуктивно знаходимо розклад

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

де a_n — старший коефіцієнт многочлена $P(x)$.

Останній розклад свідчить про те, що єдиними коренями многочлена $P(x)$ є числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (серед яких можуть бути і рівні). $\square$

В якості наслідків одержуємо такі теореми, доведення яких пропонуємо виконати читачам самостійно як вправу.

Теорема 3.9. *Якщо значення двох многочленів, степінь яких не перевищує n, співпадають в $n+1$ точках, то ці многочлени рівні.*

Теорема 3.10. *Будь-який многочлен $P(x)$ степеня $n \geqslant 0$ єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) можна подати у вигляді*

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

де a_n — старший коефіцієнт многочлена $P(x)$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — його корені.

Теорема 3.11. *Многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $Q(x) \not\equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли кожний корінь многочлена $Q(x)$ є коренем многочлена $P(x)$ не меншої кратності.*

А тепер перейдемо до розв'язування олімпіадних задач про рівність та подільність многочленів.

Задача 3.1. *Перевірте справедливість рівності*

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

(Математична олімпіада Румунії, 1953 р.)

Розв'язання. Ця задача пов'язана з многочленами неявно. Позначимо ліву частину даної рівності через x і проаналізуємо її. Із наявності в ній кубічних коренів, приходимо до висновку про доцільність розгляду виразу x^3. Скористаємось відомою формулою

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$$

і одержимо:

$$x^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} +$$
$$+ 3\sqrt[3]{\left(20 + 14\sqrt{2}\right)\left(20 - 14\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) =$$
$$= 40 + 3\sqrt[3]{400 - 392} \cdot x = 40 + 6x.$$

Отже, x є коренем рівняння

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

Легко перевірити, що $x = 4$ є коренем многочлена $P(x) = x^3 - 6x - 40$. Поділивши його на двочлен $x-4$, одержимо многочлен $Q(x) = x^2 + 4x + 10$, який має комплексні корені. Це означає, що многочлен $P(x) = x^3 - 6x - 40$ має один дійсний і два комплексних корені. Оскільки через x позначено дійсне число, то $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{2}} = 4$ — правильна рівність. □

Задача 3.2. *Нехай $P(x, y, z)$ — довільний многочлен з трьома невідомими. Доведіть, що многочлен*

$$Q(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y) - \\ - P(x,z,y) - P(z,y,x) - P(y,x,z)$$

ділиться на многочлен $(x-y)(y-z)(z-x)$.

Розв'язання. Розглянемо $Q(x, y, z)$ як многочлен від x. Доведемо, що y — корінь цього многочлена:

$$Q(y,y,z) = P(y,y,z) + P(y,z,y) + P(z,y,y) - \\ - P(y,z,y) - P(z,y,y) - P(y,y,z) = 0.$$

Це означає, що $Q(x, y, z)$ ділиться на $x - y$ (за теоремою 3.6). Аналогічно доводиться, що $Q(x, y, z)$ ділиться і на $y-z$ і на $z-x$. Отже, $Q(x, y, z)$ ділиться і на їх добуток $(x-y)(y-z)(z-x)$. □

Задача 3.3. *Нехай $P(x)$ — многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами. Доведіть, що рівняння $P(P(x)) = 0$ має не менше різних дійсних коренів, ніж рівняння $P(x) = 0$.*

(Математична олімпіада Росії, 2002 р.)

Розв'язання. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — всі різні корені рівняння $P(x) = 0$. Нам треба довести, що рівняння $P(P(x)) = 0$ має принаймні n різних коренів.

Розглянемо n різних рівнянь: $P(x) = x_1$, $P(x) = x_2$, …, $P(x) = x_n$. Кожне із цих рівнянь має хоча б один дійсний корінь, бо многочлен $P(x)$ непарного степеня. Нехай y_1 — корінь першого рівняння, y_2 — корінь другого рівняння, …, y_n — корінь n-го рівняння. Тоді для будь-яких i та j $(i \neq j)$ числа y_i та y_j — різні. Дійсно, якщо це не так, то з умови $y_i = y_j$ випливає рівність $P(y_i) = P(y_j)$. Оскільки $P(y_i) = x_i$, а $P(y_j) = x_j$, то одержуємо, що $x_i = x_j$. А це суперечить припущенню про те, що корені різні.

При цьому кожне число y_k є коренем рівняння $P(P(x)) = 0$, бо $P(P(y_k)) = P(x_k) = 0$. Отже, рівняння $P(P(x)) = 0$ має принаймні n різних коренів $y_1, y_2, \ldots, y_n$, що і треба було довести. □

Задача 3.4. *Знайти многочлен з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число* $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

(Математична олімпіада Бельгії, 1978 р.)

Розв'язання. Нехай $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, тоді $\sqrt[3]{3}=x-\sqrt{2}$. Після піднесення обох частин останньої рівності до кубу, одержимо:

$$3=x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}.$$

Звідки знаходимо, що $\left(3x^2+2\right)\sqrt{2}=x^3+6x-3$. Після піднесення обох частин останньої рівності до квадрату, одержимо:

$$\left(9x^4+12x^2+4\right)2=x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x,$$

тобто

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0.$$

Отже, многочлен $P(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ має коренем число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, тобто є одним із шуканих. □

Задача 3.5. *Нехай* $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ *і* $Q(x)=x^2+px+q$ *— два многочлени з дійсними коефіцієнтами. Відомо, що існує інтервал* (r,s), *довжина якого більша за 2, на якому обидва многочлени приймають від'ємні значення, а зовні його — невід'ємні. Доведіть, що знайдеться така точка* x_0, *що* $P(x_0)<Q(x_0)$.

(Математична олімпіада Росії, 2001 р.)

Розв'язання. Із умови задачі слідує, що

$$Q(x)=(x-r)(x-s),$$

де $s-r>2$ і

$$P(x)=(x-r)(x-s)\left(x^2+ux+v\right),$$

бо $P(r)=Q(r)=0$, $P(s)=Q(s)=0$. Припустимо, що при усіх дійсних x виконується нерівність $P(x)\geqslant Q(x)$, тобто

$$(x-r)(x-s)\left(x^2+ux+v-1\right)\geqslant 0$$

при всіх дійсних x. Ця нерівність буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли многочлени $x^2+ux+(v-1)$ і $(x-r)(x-s)$ будуть рівними. Отже, $u=-(r+s)$ і $v-1=rs$. Це означає, що дискримінант квадратного тричлена x^2+ux+v буде рівний

$$D=u^2-4v=(r+s)^2-4(rs+1)=(s-r)^2-4>0,$$

оскільки $s-r>2$. Таким чином, квадратний тричлен x^2+ux+v буде мати два різних дійсних корені t і l, тобто $x^2+ux+v=(x-t)(x-l)$, і на проміжку

(t,l) він буде приймати від'ємні значення, а зовні його — невід'ємні. Проміжок (t,l) не співпадає з проміжком (r,s), бо квадратні тричлени $x^2+ux+(v-1)$ і x^2+ux+v відрізняються на 1. А це означає, що многочлен

$$P(x)=(x-r)(x-s)(x-t)(x-l)$$

не може мати лише одного проміжку, на якому він прийматиме від'ємні значення. Це суперечить умові задачі. Одержане протиріччя і доводить існування такої точки x_0, що $P(x_0)<Q(x_0)$. □

Задача 3.6. *Нехай $P(x)$ — многочлен степеня n. Відомо, що*

$$P(k)=\frac{k}{k+1}$$

для всіх цілих $k=0,1,\ldots,n-1,n$. Знайдіть $P(k)$ для цілих $k>n$.

(Математичні змагання Румунії, 2003 р.)

Розв'язання. Оскільки $P(0)=0$, то $P(x)=xQ(x)$, де $Q(x)$ — многочлен $n-1$ -го степеня. Тоді

$$Q(k)=\frac{1}{k+1}$$

для всіх цілих $k=1,2,\ldots,n$.

Нехай $H(x)=(x+1)Q(x)-1$. Тоді $H(x)$ — многочлен n-го степеня. Для усіх цілих $k=1,2,\ldots,n$ виконуються рівності $H(k)=0$. Це означає, що

$$H(x)=(x+1)Q(x)-1=a(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

де a — старший коефіцієнт. Щоб знайти його значення, покладемо в останню рівність $x=-1$:

$$H(-1)=-1=(-1)^n a(n+1)!.$$

Звідси знаходимо $a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Далі, при $x=k$, $k>n$ знаходимо:

$$Q(k)=\frac{(-1)^{n+1}(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{(n+1)!(k+1)}+\frac{1}{k+1},$$

а

$$P(k)=\frac{(-1)^{n+1}k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{(n+1)!(k+1)}+\frac{k}{k+1},$$

що і вимагалось. □

Задача 3.7. *Нехай $P(x)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами. Доведіть, що $P(x)$ — буде парною функцією тоді і тільки тоді, коли існує такий многочлен $Q(x)$ з комплексними коефіцієнтами, що $P(x)=Q(x)Q(-x)$ для* *будь-якого x.*

(Математична олімпіада Румунії, 1979 р.)

Розв'язання. Зрозуміло, що коли такий многочлен $Q(x)$ існує, то $P(x)$ буде парною функцією. Дійсно, $P(-x) = Q(-x)Q(x) = Q(x)Q(-x) = P(x)$, тобто $P(-x) = P(x)$ для будь-якого x.

Нехай $P(x)$ — парна функція, тоді $P(-x) = P(x)$ для будь-якого x. Використовуючи теорему 3.1 про рівність двох многочленів, остання рівність дає, що усі коефіцієнти при членах многочлена $P(x)$, що мають непарний степінь, дорівнюють нулеві. Тому, такий многочлен має вигляд

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0 = P_1\left(x^2\right).$$

За теоремою 3.10 маємо

$$P_1(y) = a(y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_n),$$

тобто

$$P(x) = a\left(x^2 - y_1\right)\left(x^2 - y_2\right)\ldots\left(x^2 - y_n\right).$$

Виберемо такі комплексні числа $b, x_1, x_2, \ldots, x_n$, що $b^2 = (-1)^n a$ та $x_j^2 = y_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді останній розклад на множники многочлена $P(x)$ можна переписати так:

$$\begin{aligned}
P(x) &= b^2\left(x_1^2 - x^2\right)\left(x_2^2 - x^2\right)\ldots\left(x_n^2 - x^2\right) = \\
&= b^2(x_1 - x)(x_1 + x)(x_2 - x)(x_2 + x)\ldots(x_n - x)(x_n + x) = \\
&= (b(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_n - x))(b(x_1 + x)(x_2 + x)\ldots(x_n + x)) = \\
&= Q(x)Q(-x),
\end{aligned}$$

де $Q(x) = b(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_n - x)$ — шуканий многочлен. Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 3.8. *Розглянемо два многочлени з комплексними коефіцієнтами*

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \ \text{ і } \ Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Відомо, що $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корені многочлена $P(x)$, а $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ — корені многочлена $Q(x)$. Доведіть, що коли суми $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ і $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ — дійсні числа, то сума $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ також дійсне число.

(Математичні змагання США, 2005 р.)

Розв'язання. Відомо, що комплексне число буде дійсним тоді і тільки тоді, коли воно співпадає зі спряженим до нього числом. Оскільки суми $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ і $a_2 + a_4 + a_6$ є півсумою та піврізницею чисел $P(1) - 1$ і $P(-1) - 1$, то числа $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ і $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ будуть дійсними тоді і тільки тоді, коли $P(1) = \overline{P(1)}$ і $P(-1) = \overline{P(-1)}$.

Оскільки

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

то

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) = (1 - \overline{x_1})(1 - \overline{x_2})\ldots(1 - \overline{x_n})$$

і

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) = (1 + \overline{x_1})(1 + \overline{x_2})\ldots(1 + \overline{x_n}).$$

Перемножуючи останні дві рівності, одержимо:

$$\left(1 - x_1{}^2\right)\left(1 - x_2{}^2\right)\ldots\left(1 - x_n{}^2\right) = \left(1 - \overline{x_1}^2\right)\left(1 - \overline{x_2}^2\right)\ldots\left(1 - \overline{x_n}^2\right),$$

тобто $Q(1) = \overline{Q(1)}$. Оскільки $Q(1) = 1 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, то остання рівність означає, що сума $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ — дійсне число, що і треба було довести. □

3.2. Формули Вієта

Розглянемо многочлен n-го степеня

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

з комплексними коефіцієнтами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

За основною теоремою алгебри многочленів цей многочлен має рівно n комплексних коренів. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корені многочлена $P(x)$. Тоді за теоремою 3.10 маємо:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Розкриваючи дужки у останньому розкладі многочлена $P(x)$, після зведення подібних доданків, одержимо:

$$P(x) = a_n x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + \\ + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0.$$

Використовуючи теорему 3.1 про рівність двох многочленів, знаходимо:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Ці n рівностей, які вказують на зв'язок коренів многочлена і його коефіцієнтів, називають *формулами Вієта*. Вони об'єднують два шляхи розгляду многочлена: як суму одночленів та як добуток лінійних множників.

А тепер перейдемо до розв'язування олімпіадних задач із застосуванням цих формул.

Задача 3.9. *Нехай x, y, z — такі комплексні числа, що $x+y+z=0$. Доведіть, що правильною буде така рівність*

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}.$$

(Математичні змагання Китаю, 1957 р.)

Розв'язання. Розглянемо многочлен $P(t)=t^3+pt+q$, коренями якого будуть задані числа x, y і z. Тоді за формулами Вієта:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ xy+xz+yz&=p,\\ xyz&=-q. \end{aligned}$$

Користуючись відомими алгебраїчними формулами, послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=-2p,\\ x^3+y^3+z^3-3xyz&=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right),\\ x^3+y^3+z^3&=-3q. \end{aligned}$$

Останній результат можна було обчислити ще й в такий спосіб: оскільки x, y і z — корені многочлена $P(t)=t^3+pt+q$, то $x^3=-px-q$, $y^3=-py-q$ і $z^3=-pz-q$. Додавши ці три останні рівності і врахувавши формули Вієта для многочлена $P(t)$, одержимо: $x^3+y^3+z^3=-3q$.

Далі, аналогічно знаходимо: 1) оскільки $x^4=-px^2-qx$, $y^4=-py^2-qy$, $z^4=-pz^2-qz$, то

$$x^4+y^4+z^4=-p\left(x^2+y^2+z^2\right)-q(x+y+z)=2p^2;$$

2) оскільки $x^5=-px^3-qx^2$, $y^5=-py^3-qy^2$, $z^5=-zy^3-qz^2$, то

$$x^5+y^5+z^5=-p\left(x^3+y^3+z^3\right)-q\left(x^2+y^2+z^2\right)=5pq;$$

3) оскільки $x^7=-px^5-qx^4$, $y^7=-py^5-qy^4$, $z^7=-zy^5-qz^4$, то

$$x^7+y^7+z^7=-p\left(x^5+y^5+z^5\right)-q\left(x^4+y^4+z^4\right)=-7p^2q.$$

Таким чином,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{-2p}{2}\cdot\frac{5pq}{5}=-p^2q=\frac{x^7+y^7+z^7}{7},$$

що і треба було довести. □

Задача 3.10. *Знайдіть максимальне значення дійсного числа λ таке, що для будь-якого многочлена 4-го степеня $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, усі корені якого — додатні дійсні числа, виконується нерівність*

$$(b-a-c)^2 \geqslant \lambda d,$$

і знайдіть при якій умові досягається знак рівності.

(Математична олімпіада Росії, 2001 р.)

Розв'язання. Нехай r_1, r_2, r_3, r_4 — корені многочлена $P(x)$, $r_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. За формулами Вієта, маємо:

$$\begin{aligned} a &= -\left(r_1 + r_2 + r_3 + r_4\right), \\ b &= r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4, \\ c &= -\left(r_1r_2r_3 + r_1r_3r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4\right), \\ d &= r_1r_2r_3r_4. \end{aligned}$$

Тоді наш вираз

$$b-a-c = \left(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4\right) + \left(r_1 + r_2 + r_3 + r_4\right) + \\ + \left(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4\right).$$

Застосуємо до 14-ти додатних доданків в правій частині попередньої рівності нерівність Коші між їх середнім арифметичним і їх середнім геометричним:

$$b-a-c \geqslant 14\sqrt[14]{\left(r_1r_2r_3r_4\right)^7} = 14\sqrt{d}.$$

Звідки, після піднесення до квадрату, слідує, що $(b-a-c)^2 \geqslant 196d$. Рівність в цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли усі ці 14 чисел будуть рівними, тобто коли $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$. Нерівність $(b-a-c)^2 \geqslant \lambda d$ буде виконуватися тоді і тільки коли $196 \geqslant \lambda$. Тому, найбільше значення $\lambda = 196$. Воно досягається тоді і тільки тоді, коли $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

Відповідь. 196. □

Задача 3.11. *Рівняння*

$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0$$

має чотири різні дійсні корені. Доведіть, що $ab < 0$.

(Третя Всеросійська олімпіада, 1977 р.)

Розв'язання. Нехай $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ — корені даного рівняння. Тоді

$$x_k^4 + ax_k^3 + bx_k + c = 0 \text{ і } x_m^4 + ax_m^3 + bx_m + c = 0.$$

Віднявши від першої рівності другу, одержимо

$$(x_k - x_m)\Big((x_k + x_m)\big(x_k^2 + x_m^2\big) + a\big(x_k^2 + x_k x_m + x_m^2\big) + b\Big) = 0.$$

Якщо $k \neq m$, то звідси слідує, що

$$x_k + x_m = -a \cdot \frac{x_k^2 + x_k x_m + x_m^2}{x_k^2 + x_m^2} - b \cdot \frac{1}{x_k^2 + x_m^2}. \tag{3.2}$$

Крім того, за теоремою Вієта

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 0. \tag{3.3}$$

Доведемо, що $ab < 0$. Припустимо, що це не так, тоді $ab \geqslant 0$. Нехай, наприклад, $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ (випадок, коли $a = 0$, b — довільне дійсне; $b = 0$, a — довільне дійсне, а також випадок $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$ розглядаються аналогічно, і ми залишаємо читачеві можливість прийти до протиріччя в кожному із цих випадків). Тоді, із формули (3.2) маємо, що $x_1 + x_2 \leqslant 0$. Аналогічно одержуємо, що $x_1 + x_3 \leqslant 0$, $x_1 + x_4 \leqslant 0$, $x_2 + x_3 \leqslant 0$, $x_2 + x_4 \leqslant 0$, $x_3 + x_4 \leqslant 0$. Це означає, що серед чисел x_1, x_2, x_3, x_4 не більше одного додатного, тобто $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$ (оскільки x_4 — найбільший із коренів). Але тоді із рівності (3.3), яка має вигляд

$$x_1\big(x_2 + x_4\big) + x_3\big(x_1 + x_4\big) + x_2\big(x_3 + x_4\big) = 0,$$

слідує, що $x_2 + x_4 = x_1 + x_4 = x_3 + x_4 = 0$. Звідси $x_1 = x_2 = x_3$, що суперечить умові задачі. □

Задача 3.12. *Доведіть, що*

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\big(5 - 3\sqrt[3]{7}\big)}.$$

Розв'язання. Спробуємо знайти многочлен, коренями якого є числа, що фігурують в лівій частині рівності. Але перед цим спробуємо знайти многочлен, коренями якого є числа $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{8\pi}{7}$. Для цього розглянемо многочлен сьомого степеня $x^7 - 1$. Розклавши його на множники

$$x^7 - 1 = (x - 1)\big(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\big),$$

одержуємо, що $x = 1$ — єдиний дійсний його корінь, а наступні шість комплексних чисел $x = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ — усі корені рівняння

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Легко перевірити, що числа $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$, $2\cos\frac{8\pi}{7}$ є значеннями виразу $x + \frac{1}{x}$ при вказаних вище значеннях x.

Поділивши обидві частини останнього рівняння на x^3, одержимо:

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Якщо позначити $x+\frac{1}{x}$ через y, то одержимо: $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, а $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$. Це означає, що числа $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$, $2\cos\frac{8\pi}{7}$ є коренями рівняння

$$y^3+y^2-2y-1=0.$$

Отже, за формулами Вієта одержуємо:

$$2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{8\pi}{7}=-1,$$
$$4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+4\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+4\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-2,$$
$$8\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=1.$$

Звідси випливає, що

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8}.$$

Але нам потрібно знайти суму кубічних коренів із коренів рівняння $y^3+y^2-2y-1=0$. Для цього скористаємося формулою про суму трьох кубів, яка виражається через основні симетричні многочлени третього степеня:

$$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(X+Y+Z)^3-3(X+Y+Z)(XY+YZ+ZX).$$

Із цієї формули можна одержати й таку формулу:

$$X^3Y^3+Y^3Z^3+Z^3X^3-3(XYZ)^2=(XY+YZ+ZX)^3-$$
$$-3(XY+YZ+ZX)XYZ(X+Y+Z).$$

Нехай X^3, Y^3, Z^3 — корені рівняння $y^3+y^2-2y-1=0$. Тоді за формулами Вієта маємо: $X^3Y^3Z^3=1$, тобто $XYZ=1$, а також $X^3+Y^3+Z^3=-1$ і $X^3Y^3+Y^3Z^3+Z^3X^3=-2$. За допомогою цих рівностей легко обчислюються значення лівих частин в обох формулах. Увівши позначення $u=X+Y+Z$ і $v=XY+YZ+ZX$ ці обидві формули нам задають наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} u^3-3uv=-4,\\ v^3-3uv=-5, \end{cases}$$

яку треба розв'язати в дійсних числах. З обох рівнянь системи знаходимо, що $u^3 = 3uv - 4$ і $v^3 = 3uv - 5$. Перемноживши, одержимо:

$$(uv)^3 = 9(uv)^2 - 27(uv) + 20.$$

Позначимо $t = uv$, тоді $t^3 - 3t^2 + 27t - 20 = 0$, тобто $(t-3)^3 + 7 = 0$. Звідки, враховуючи, що t — дійсне, знаходимо: $t = 3 - \sqrt[3]{7}$, тобто $uv = 3 - \sqrt[3]{7}$. Із першого рівняння системи знаходимо: $u = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$. Таким чином,

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(X + Y + Z) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt[3]{7}\right)},$$

що і треба було довести. □

Задача 3.13. *Учень записав на дошці раціональне рівняння, всі 1969 коренів якого — додатні числа. Однак через свою неуважність він пропустив частину його членів. Тому було написано лише так:*

$$x^{1969} - 1969x^{1968} + \underbrace{\cdot \quad \cdot \quad \cdot}_{\text{пропущено}} - 1 = 0.$$

Допоможіть учневі за цих умов знайти усі корені рівняння. Спробуйте також поновити повний запис рівняння.

(Всеукраїнська математична олімпіада, 1969 р.)

Розв'язання. Як відомо за основною теоремою алгебри многочленів, кожен многочлен на множині комплексних чисел має стільки коренів, який його степінь, і розкладається на лінійні множники:

$$x^{1969} - 1969x^{1968} + \ldots - 1 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots\left(x - x_{1969}\right),$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_{1969}$ — додатні числа. За формулами Вієта

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1969} = 1969 \text{ і } x_1 x_2 \ldots x_{1969} = 1. \tag{3.4}$$

Оскільки $x_1, x_2, \ldots, x_{1969}$ — додатні числа, то до них можна застосувати нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним, згідно з якою

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{1969}}{1969} \geqslant \sqrt[1969]{x_1 x_2 \ldots x_{1969}},$$

причому рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1969}$. Із рівностей (3.4) випливає, що

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{1969}}{1969} = \sqrt[1969]{x_1 x_2 \ldots x_{1969}},$$

тобто середнє арифметичне чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{1969}$ дорівнює їх середньому геометричному, а це можливо тоді, коли ці числа рівні між собою. Тоді, з рівностей (3.4) одержуємо: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1969} = 1$. Отже, згадане рівняння можна записати так: $(x-1)^{1996}=0$. Застосовуючи формулу бінома Ньютона, матимемо

$$x^{1996}-1969x^{1968}+\frac{1969\cdot 1968}{1\cdot 2}x^{1967}-\ldots+(-1)^{k+1}C_{1969}^{k}x^{k}+\ldots+1969x-1=0.$$

□

Задача 3.14. *Добуток двох з чотирьох коренів рівняння*

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$$

дорівнює -32. *Знайдіть значення* k.

(Математична олімпіада США, 1984 р.)

Розв'язання. Нехай a, b, c, d — корені заданого рівняння. За теоремою Вієта

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=18,\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd&=k,\\ abc+abd+acd+bcd&=-200,\\ abcd&=-1984. \end{aligned}$$

Не порушуючи загальності вважатимемо, що $ab=-32$. Тоді з того, що $abcd=$ $=-1984$, знаходимо, що $cd=62$. Повернемось до формул Вієта:

$$a+b+c+d=18, \qquad (3.5)$$

$$30+ac+ad+bc+bd=k, \qquad (3.6)$$

$$-32c-32d+62a+62b=-200. \qquad (3.7)$$

Насправді, щоб знайти k, зовсім необов'язково знаходити a, b, c і d. Помітимо, що

$$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$$

і позначимо $u=a+b$, $v=c+d$. Тоді рівності (3.5)–(3.7) набувають вигляду

$$\begin{aligned} u+v&=18,\\ 30+uv&=k,\\ -32u+62v&=-200. \end{aligned}$$

Із першого і третього співвідношень знаходимо, що $u=4$, $v=14$. Тоді $k=$ $30+4\cdot 14=86$.

Відповідь. 86. □

Задача 3.15. *а) Нехай a дійсне число. Доведіть, що рівняння*

$$x^4-x^3+8ax^2-ax+a^2=0$$

рівносильне рівнянню

$$\left(x^2 - x_1x + a\right)\left(x^2 - x_2x + a^2\right) = 0,$$

де x_1 *і* x_2 *— корені рівняння* $x^2 - x + 6a = 0$.

б) Знайдіть усі дійсні значення числа a, для кожного із яких рівняння $x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2 = 0$ *матиме чотири різних дійсних додатні корені.*

(Болгарія, 2004 р.)

Розв'язання. а) Оскільки x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - x + 6a = 0$, то за формулами Вієта: $x_1 + x_2 = 1$ і $x_1x_2 = 6a$. Тому, після розкриття дужок і зведення подібних доданків, одержуємо:

$$\begin{aligned}&\left(x^2 - x_1x + a\right)\left(x^2 - x_2x + a^2\right) = \\ &\qquad = x^4 - (x_1 + x_2)\,x^3 + (2a + x_1x_2)\,x^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + a^2 = \\ &\qquad\qquad = x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2,\end{aligned}$$

що і завершує доведення.

б) Усі корені рівняння $x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2 = 0$, це корені t_1, t_2 і t_3, t_4 рівнянь $x^2 - x_1x + a = 0$ і $x^2 - x_2x + a = 0$ відповідно. Легко бачити, що t_1, t_2, t_3, і t_4 дійсні, різні і додатні, коли саме наступні умови виконуються одночасно:

1) $a > 0$ і $x_1 \neq x_2$ — дійсні, тобто $a > 0$ і $D = 1 - 24a > 0$. Звідки $a > 0$ і $a < \frac{1}{24}$;

2) $D_1 = x_1^2 - 4a > 0$ і $D_2 = x_2^2 - 4a > 0$, тобто $x_1 > 10a > 0$ і $x_2 > 10a > 0$;

3) $t_1 + t_2 = x_1 > 0$, $t_1t_2 = a > 0$, $t_3 + t_4 = x_2 > 0$ і $t_3t_4 = a > 0$, тобто $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $a > 0$.

Ці умови дають, що $0 < a < \frac{1}{24}$, $x_1 > 10a > 0$ і $x_2 > 10a > 0$, причому $g\,(10a) > 0$ і $25a > 1$, де $g\,(x) = x^2 - x + 6a$. Звідси $\frac{1}{25} < a < \frac{1}{24}$.

Відповідь. б) $\left(\frac{1}{25}; \frac{1}{24}\right)$ □

Задача 3.16. *Нехай a і b, такі дійсні числа, що рівняння*

$$x^3 + \sqrt{3}\,(a - 1)\,x^2 - 6ax + b = 0$$

має три дійсних корені. Доведіть, що $|b| \leqslant |a + 1|^3$.

(Білорусь, 1995 р.)

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + \sqrt{3}\,(a - 1)\,x^2 - 6ax + b = 0$. Тоді, за формулами Вієта, матимемо:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= \sqrt{3}\,(1 - a)\,,\\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= -6a,\\ x_1x_2x_3 &= -b.\end{aligned}$$

Далі, скористаємося нерівністю між середнім квадратичним і середнім геометричним трьох невід'ємних чисел $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$:

$$\sqrt[3]{|b|} = \sqrt[3]{|x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3|} \leqslant \sqrt{\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{3}} = \sqrt{\frac{3(1-a)^2 + 12a}{3}} = |a+1|.$$

Звідси й випливає, що $|b| \leqslant |a+1|^3$, що і треба було довести. □

Задача 3.17. *Рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має три (не обов'язково різні) дійсні корені u, v, w. Для яких дійсних значень a, b, c числа u^3, v^3, w^3 будуть коренями рівняння $x^3 + a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$?*

(В'єтнам, 1979 р.)

Розв'язання. Оскільки дійсні числа u, v, w — корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, то за формулами Вієта матимемо:

$$\begin{cases} u + v + w = -a, \\ uv + vw + wu = b, \\ uvw = -c. \end{cases}$$

А з того, що числа u^3, v^3, w^3 — корені рівняння $x^3 + a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$, то за формулами Вієта матимемо:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + w^3 = -a^3, \\ u^3v^3 + v^3w^3 + w^3u^3 = b^3, \\ u^3v^3w^3 = -c^3. \end{cases}$$

Використовуючи формулу

$$(u+v+w)^3 = u^3 + v^3 + w^3 + 3\,(u+v+w)\,(uv+vw+wu) - 3uvw,$$

одержуємо: $-a^3 = -a^3 - 3ab + 3c$, тобто $c = ab$. У цьому випадку обидва рівняння будуть мати вигляд: $x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$ і $x^3 + a^3x^2 + b^3x + a^3b^3 = 0$, тобто $(x+a)\left(x^2+b\right) = 0$ і $\left(x+a^3\right)\left(x^2+b^3\right) = 0$. Якщо $b > 0$, то перше рівняння буде мати лише один дійсний корінь, що суперечить умові. Якщо $b \leqslant 0$, то перше рівняння матиме корені: $x_1 = -a$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-b}$. Аналогічно, друге рівняння матиме корені $y_1 = -a^3$, $y_{2,3} = \pm\sqrt{-b^3}$. Звідки слідує, що $y_1 = (x_1)^3$, $y_2 = (x_2)^3$, $y_3 = (x_3)^3$, тобто умови задачі виконуються.

Відповідь. $c = ab$, $b \leqslant 0$. □

Задача 3.18. *Доведіть, що для будь-яких ненульових значень a і b корені x_1, x_2, x_3 рівняння*

$$ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$$

задовольняють рівність

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

(ФРН, 1970 р.)

Розв'язання. За формулами Вієта для коренів x_1, x_2, x_3 кубічного рівняння $ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$, одержимо:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{b}{a},$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a}.$$

Тому,

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{x_1x_2x_3} =$$
$$= 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = -1,$$

що і треба було довести. □

Задача 3.19. *Скільки існує різних значень параметра a, для кожного із яких рівняння $x^3 = ax + a + 1$ має цілий парний корінь x, причому $|x| < 1000$?*

(Китай, 2008 р.)

Розв'язання. Наша мета полягає у тому, щоб довести, що для будь-якого цілого парного x, для якого виконується нерівність $|x| \leqslant 998$, усі значення параметра $a = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$ будуть попарно різними.

Припустимо, що існують $x_1 \neq x_2$, для яких $\dfrac{x_1^3 - 1}{x_1 + 1} = \dfrac{x_2^3 - 1}{x_2 + 1}$, де x_1 і x_2 — цілі парні числа. Тоді,

$$\left(x_1^3 - 1\right)(x_2 + 1) = \left(x_2^3 - 1\right)(x_1 + 1),$$
$$x_1^3x_2 - x_2 + x_1^3 - 1 = x_1x_2^3 - x_1 + x_2^3 - 1,$$
$$x_1x_2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + (x_1 - x_2) + \left(x_1^3 - x_2^3\right) = 0,$$
$$(x_1 - x_2)\left(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1\right) = 0.$$

Оскільки $x_1 \neq x_2$, то $x_1 - x_2 \neq 0$. Крім того, числа x_1 і x_2 — парні, а тому число $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1$ — непарне, тобто також не дорівнює 0, що суперечить останній рівності. Таким чином, існують 999 різних значень параметра a, які задовольняють умовам задачі.

Відповідь. 999. □

Задача 3.20. *Про дійсні числа $a_7, a_6, \ldots, a_1, a_0$ відомо, що рівняння*

$$x^{10} - 10x^9 + 39x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

має 10 *дійсних коренів. Доведіть, що усі ці корені лежать між числами* −2,5 *і* 4,5.

(В'єтнам, 1991 р.)

Розв'язання. Нехай $x_1, \ldots, x_{10}$ — 10 дійсних коренів заданого рівняння. Тоді, за формулами Вієта:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 10} x_ix_j = 39.$$

Тоді, використовуючи формулу

$$\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 10} x_ix_j,$$

знаходимо:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100 - 2\cdot 39 = 22.$$

Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} 1 = 22 - 2\cdot 10 + 10 = 12.$$

Звідси випливає, що $(x_i - 1)^2 \leqslant 12 < (3{,}5)^2$, для усіх $i = 1, 2, \ldots, 10$. Звідки слідує, що $-3{,}5 < x_i - 1 < 3{,}5$, тобто $-2{,}5 < x_i < 4{,}5$, що і треба було довести.
□

Задача 3.21. *Знайдіть корені многочлена*

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25,$$

якщо відомо, що сума двох із них дорівнює 4.

Розв'язання. Позначимо корені даного многочлена через x_1, x_2, x_3, x_4, причому $x_1+x_2=4$. Перша із формул Вієта для даного многочлена дає:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=6,$$

тому $x_3+x_4=2$.

Друга формула Вієта для даного многочлена дає:

$$x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)\big(x_3+x_4\big)=18,$$

тобто $x_1x_2+x_3x_4=18-4\cdot 2=10$. Використовуючи четверту формулу Вієта для даного многочлена, одержуємо: $x_1x_2x_3x_4=25$. Таким чином, числа x_1x_2 і x_3x_4 є коренями квадратного рівняння $t^2-10t+25=0$. Звідки знаходимо, що $x_1x_2=x_3x_4=5$. Оскільки $x_1+x_2=4$ і $x_1x_2=5$, то x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2-4x+5=0$. Оскільки $x_3+x_4=2$ і $x_3x_4=5$, то x_3 і x_4 є коренями рівняння $x^2-2x+5=0$. Розв'язавши ці квадратні рівняння ми знаходимо, що $P(x)$ має корені: $2+i$, $2-i$, $1+2i$, $1-2i$.

Відповідь. $2+i$, $2-i$, $1+2i$, $1-2i$. □

Задача 3.22. *Нехай a, b, c — дійсні числа. Доведіть, що $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ і $c\geqslant 0$ тоді і тільки тоді, коли $a+b+c\geqslant 0$, $ab+bc+ca\geqslant 0$ і $abc\geqslant 0$.*

Розв'язання. Якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ і $c\geqslant 0$, то очевидно, що $a+b+c\geqslant 0$, $ab+bc+ca\geqslant 0$ і $abc\geqslant 0$. Навпаки, припустимо, що числа $u=a+b+c$, $v=ab+bc+ca$ і $w=abc$ — невід'ємні. Тоді числа a, b і c — корені многочлена

$$P(x)=x^3-ux^2+vx-w.$$

Якщо $t<0$, тобто $t=-s$, де $s>0$, тоді $P(t)=-\big(s^3+us^2+vs+w\big)<0$, тобто многочлен $P(x)$ не має від'ємних корені. Це означає, що усі його корені невід'ємні, що і завершує доведення. □

Задача 3.23. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xyz=1, \end{cases}$$

де x, y, z — комплексні числа, модулі яких дорівнюють 1.

Розв'язання. Нехай (a,b,c) — розв'язок даної системи, де $a,b,c\in\mathbb{C}$, причому $|a|=|b|=|c|=1$. Тоді

$$a+b+c=1$$

і

$$abc=1.$$

Розглянувши рівність, *спряжену* до першої рівності $a+b+c=1$, матимемо:

$$\overline{a+b+c}=1,$$

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=1,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

(тут ми врахували, що $|a|=|b|=|c|=1$).

Далі,

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=1,$$

а врахувавши другу рівність $abc=1$, матимемо: $ab+bc+ca=1$.

Це означає, що числа a, b і c — корені рівняння:

$$t^3-t^2+t-1=0.$$

Розклавши його ліву частину на множники, одержимо:

$$(t-1)\left(t^2+1\right)=0.$$

Коренями останнього рівняння будуть числа 1, i та $-i$.

Таким чином, трійка чисел $(1,i,-i)$ та усі її можливі перестановки (їх буде всього шість) будуть розв'язками даної системи (це легко перевіряється). □

Задача 3.24. *Знайдіть усі дійсні числа r, для кожного із яких існує хоча б одна трійка (x,y,z) дійсних, відмінних від нуля, чисел, яка задовольняє наступні рівності:*

$$x^2y+y^2z+z^2x=xy^2+yz^2+zx^2=rxyz.$$

Розв'язання. Поділивши задані рівності на ненульове число xyz, одержимо:

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}=r.$$

Введемо позначення: $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Тоді $abc=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=r$, $a+b+c=r$, тобто

$$a+b+c=r,$$

$$ab+bc+ca=r,$$

$$abc=1.$$

Це означає, що числа a, b, c — корені рівняння $t^3-rt^2+rt-1=0$. Розклавши його ліву частину на множники, одержимо:

$$(t-1)\left(t^2-(r-1)t+1\right)=0.$$

Для того, щоб усі три корені цього рівняння були дійсними, необхідно і достатньо, щоб дискримінант квадратного рівняння

$$t^2-(r-1)\,t+1=0$$

був невід'ємним дійсним числом, тобто коли $(r-1)^2-4\geqslant 0$. Звідки знаходимо, що $r\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$, тобто ці значення r є шуканими. $\square$

Задача 3.25. *П'ять цілих чисел є такими, що суми $a+b+c+d+e$ і $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ діляться на непарне число n. Доведіть, що число*

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

також ділиться на n.

(журнал «Квант», 1979 р.)

Розв'язання. Розглянемо многочлен $P(t)=t^5+qt^4+rt^3+st^2+ut+v$ з цілими коефіцієнтами, коренями якого будуть задані цілі числа a, b, c, d і e. За першою формулою Вієта для многочлена $P(t)$ одержуємо, що q ділиться на n. Використовуючи формулу:

$$(a+b+c+d+e)^2=\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)+\\ +2\,(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\,,$$

а також другу формулу Вієта для многочлена $P(t)$, одержуємо, що r також ділиться на n (тут враховано, що n — непарне). Оскільки a, b, c, d, e — корені многочлена $P(t)$, то $P(a)=0$, $P(b)=0$, $P(c)=0$, $P(d)=0$, $P(e)=0$. Додавши ці п'ять рівностей, одержуємо, що

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+s\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)+u\,(a+b+c+d+e)+5v$$

ділиться на n. Оскільки суми $a+b+c+d+e$ і $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ діляться на n (за умовою), то $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+5v$ ділиться на n. П'ята формула Вієта для многочлена $P(t)$ дає, що $v=-abcde$. Отже, число

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

ділиться на n, що і треба було довести. $\square$

Задача 3.26. *Знайдіть усі многочлени, коефіцієнти яких дорівнюють 1 або -1, а усі корені — дійсні числа.*

(Математичні змагання Індії, 2005 р.)

Розв'язання. Нехай $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ — шуканий многочлен. За умовою задачі $a_i=\pm 1$, $i=0,1,\ldots,n$. Нехай x_1, x_2, $\ldots$, x_n — його корені. За умовою задачі $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тоді за першими двома формулами Вієта для многочлена $P(x)$, одержуємо:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Використовуючи формулу для знаходження суми квадратів декількох чисел, знаходимо:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 -$$

$$-2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right).$$

Оскільки $a_i = \pm 1$, то $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 3$. Остання формула Вієта для многочлена $P(x)$ дає $x_1^2x_2^2 \ldots x_n^2 = 1$. Застосуємо нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним чисел $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$:

$$3 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant n\sqrt[n]{x_1^2x_2^2 \ldots x_n^2} = n.$$

Звідси випливає, що $n \leqslant 3$.

Будемо знаходити спочатку такі многочлени, у яких старший коефіцієнт додатний, тобто дорівнює 1. Перебором, знаходимо, що серед лінійних многочленів шуканими будуть $x + 1$ і $x - 1$, а серед квадратних тричленів шуканими будуть $x^2 + x - 1$, $x^2 - x - 1$. Для знаходження кубічних многочленів слід врахувати, що в нерівності Коші досягається рівність. Це означає, що усі їхні корені рівні між собою за модулем, тобто $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$. Тому, невеликий перебір дає ще два многочлени: $x^3 + x^2 - x - 1$ і $x^3 - x^2 - x + 1$.

Таким чином, знайдені шість многочленів і шість многочленів, які одержуються із знайдених шляхом заміни усіх коефіцієнтів на протилежні, будуть шуканими. □

Задача 3.27. *Нехай $P(x)$ — многочлен четвертого степеня з цілими коефіцієнтами. Відомо, що r_1, r_2, r_3 і r_4 — його корені, причому $r_1 + r_2$ — раціональне число. Доведіть, що коли $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$, то r_1r_2 також раціональне число.*

(Математична олімпіада США, 2003 р)

Розв'язання. За умовою задачі

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

де a, b, c, d, e — цілі числа, $a \neq 0$. Оскільки r_1, r_2, r_3 і r_4 — його корені, то за теоремою 3.10, маємо:

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$

Перша формула теореми Вієта для даного многочлена нам дає, що

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a}.$$

Оскільки $r_1 + r_2$ і $\frac{b}{a}$ — раціональні числа, то $r_3 + r_4$ також раціональне число.

Друга формула теореми Вієта нам дає, що

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{c}{a}.$$

Звідси випливає, що

$$r_1r_2 + r_3r_4 = \frac{c}{a} - (r_1 + r_2)\big(r_3 + r_4\big).$$

Це означає, що число $r_1r_2 + r_3r_4$ також раціональне.

Третя формула Вієта нам дає, що

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{d}{a}.$$

Звідси випливає, що

$$(r_1 + r_2)\, r_3r_4 + \big(r_3 + r_4\big)\, r_1r_2 = -\frac{d}{a}.$$

Таким чином, добутки r_1r_2 і r_3r_4 є розв'язком лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = u, \\ \gamma x + \delta y = v, \end{cases}$$

де

$$\begin{gathered} \alpha = 1, \\ u = \frac{c}{a} - (r_1 + r_2)\big(r_3 + r_4\big), \\ \beta = 1, \\ v = -\frac{d}{a}, \\ \gamma = r_3 + r_4, \\ \delta = r_1 + r_2. \end{gathered}$$

Оскільки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, u, v$ — раціональні числа і $\gamma \neq \delta$, то ця система має єдиний розв'язок в раціональних числах. Отже, r_1r_2 і r_3r_4 раціональні числа, що і завершує розв'язання задачі. □

3.3. Незвідні многочлени

Трапляються випадки, коли заданий многочлен степеня $n \geqslant 1$ не можна подати у вигляді добутку двох або більше многочленів не менше, ніж 1-го степеня. Такі многочлени називають *незвідними*. Розклад многочлена на множники вважається завершеним, якщо усі одержані множники є незвідними. Відповідь на питання про звідність многочленів залежить від відомостей про його коефіцієнти. Оскільки залежно від того, якими є коефіцієнти многочлена, виділяють множини $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, то мова про звідність чи незвідність многочлена йтиме саме на вказаній множині многочленів. При цьому зазначимо, що один і той самий многочлен може бути звідним в одній множині і незвідним в іншій. Так, наприклад, многочлен $P(x)=x^2-2$ є незвідним в множинах $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ (тобто не існує цілих/раціональних чисел a, b, c, d, щоб $P(x) = (ax + b)(cx + d)$ — обґрунтування цього пропонуємо читачам виконати самостійно), проте є звідним в множинах $\mathbb{R}[x]$ та $\mathbb{C}[x]$ (оскільки $P(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, а $x \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$).

Із основної теореми алгебри многочленів випливає, що в множині $\mathbb{C}[x]$ незвідними будуть лише многочлени першого степеня.

На множині $\mathbb{R}[x]$ незвідними є многочлени першого степеня і деякі многочлени другого степеня (дискримінант яких від'ємний). Має місце таке твердження.

Теорема 3.12. *Будь-який многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами n-го степеня єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) подається у вигляді*

$$P(x)=a_n(x-x_1)\dots(x-x_m)\left(x^2+2b_1x+c_1\right)\dots\left(x^2+2b_lx+c_l\right),$$

де $m,\ l \geqslant 0$, $m+2l=n$, a_n — старший коефіцієнт многочлена $P(x)$, $x_1, \dots, x_m$ — дійсні корені $P(x)$ з урахуванням їх кратності, $b_1, \dots, b_l$, $c_1, \dots, c_l$ — дійсні числа, а квадратні тричлени $x^2+2b_1x+c_1, \dots, x^2+2b_lx+c_l$ не мають дійсних коренів (тобто $b_1^2<c_1, \dots, b_l^2<c_l$).

Цікаві ситуації відбуваються при умові, коли коефіцієнти многочлена раціональні чи цілі числа. Оскільки, помноживши многочлен з раціональними коефіцієнтами на найменший спільний знаменник усіх коефіцієнтів, ми отримаємо многочлен, усі коефіцієнти якого стануть цілими, то нас цікавитиме в основному звідність на множині многочленів $\mathbb{Z}[x]$. Слід пам'ятати, що у цьому випадку існує взаємозв'язок між многочленами і арифметикою цілих чисел.

Многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ називається *незвідним* в $\mathbb{Z}[x]$, якщо в $\mathbb{Z}[x]$ не існує многочленів $Q(x)$ і $R(x)$, відмінних від ± 1, таких, що $P(x)=Q(x)R(x)$.

В іншому випадку, $P(x)$ називатимемо *звідним* в $\mathbb{Z}[x]$. Надалі ми будемо вважати, що найбільший спільний дільник усіх коефіцієнтів будь-якого многочлена із $\mathbb{Z}[x]$ дорівнює 1.

Існує чимало ознак незвідності многочлена з цілими коефіієнтами. Однією з найпоширеніших є **ознака Ейзенштейна**[1]. З її допомогою ми можемо обґрунтувати той факт, що в множині $\mathbb{Z}[x]$ незвідними можуть бути многочлени довільного степеня.

Теорема 3.13 (Ознака Ейзенштейна незвідності многочлена з цілими коефіцієнтами[2]). *Якщо многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ з цілими коефіцієнтами такий, що існує просте число p, яке є дільником коефіцієнтів $a_{n-1}, \ldots, a_0$, причому a_n не ділиться на p, а a_0 не ділиться на p^2, то многочлен $P(x)$ — незвідний в $\mathbb{Z}[x]$.*

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $P(x) = Q(x)R(x)$, де $Q(x)$ і $R(x)$ — многочлени із $\mathbb{Z}[x]$, відмінні від ± 1. Нехай $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_0$, $R(x) = c_{n-k} x^{n-k} + c_{n-k-1} x^{n-k-1} + \ldots + c_0$. Використовуючи теорему 3.1, одержуємо, що мають місце наступні рівності:

$$\sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j} = a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Перша із цих рівностей нам дає, що $b_0 c_0 = a_0$. Оскільки a_0 ділиться на p і не ділиться на p^2, то тільки одне із чисел b_0 чи c_0 ділиться на p. Не порушуючи загальності будемо вважати, що b_0 ділиться на p, а c_0 не ділиться на p. Тоді із другої рівності $b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1$, враховуючи, що a_1 ділиться на p, одержуємо, що $b_1 c_0$ ділиться на p. Оскільки c_0 на p не ділиться, то b_1 ділиться на p. Далі, аналогічно, доводиться, що усі b_i діляться на p. Дійсно, оскільки степінь кожного із многочленів не менший за 1, то враховуючи, що a_k, $b_{k-1}, \ldots, b_0$ діляться на p, а c_0 не ділиться на p, із рівності

$$b_k c_0 + b_{k-1} c_1 + \ldots = a_k,$$

одержуємо, що b_k ділиться на p, для усіх $k < n$. Але $a_n = b_k c_{n-k}$, тобто a_n ділиться на p, що суперечить умові теореми. Одержана суперечність і доводить справедливість теореми. $\square$

Доведемо, що, наприклад, многочлен $x^{2015} - 2$ є незвідним в $\mathbb{Z}[x]$. Справді, усі його коефіцієнти, крім старшого, діляться на просте число 2, вільний член

[1] *Фердинанд Готтхольд Макс Ейзенштейн* (1823–1852) — німецький математик.

[2] Поширеною є також назва «критерій Ейзенштейна» для цього твердження, незважаючи на те, що воно є лише достатньою умовою незвідності многочлена (ознакою).

не ділиться на 2^2. Отже, за ознакою Ейзенштейна цей многочлен є незвідним в $\mathbb{Z}[x]$.

А тепер перейдемо до розв'язування олімпіадних задач про незвідність многочленів.

Задача 3.28. *Нехай $P(x)$ — многочлен n-го степеня з цілими коефіцієнтами такий, що $|P(x)|$ — просте число для $2n+1$ різних цілих значень x. Доведіть, що $P(x)$ — незвідний в $\mathbb{Z}[x]$.*

Розв'язання. Припустимо супротивне. Нехай $P(x) = Q(x)R(x)$, де $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $Q(x)$, $R(x) \neq \pm 1$. Нехай $k = \deg(Q(x))$, тоді $n-k = \deg(R(x))$. Розглянемо точку x, для якої $|P(x)|$ — просте число, тобто добуток $|Q(x)| \cdot |R(x)|$ двох натуральних чисел просте число. Це означає, що у цій точці $Q(x) = 1$ або $Q(x) = -1$, чи $R(x) = 1$ або $R(x) = -1$. Але $Q(x) = 1$ максимум в k різних точках, а $Q(x) = -1$ також максимум в k різних точках. Також, $R(x) = 1$ максимум в $n-k$ різних точках, а $R(x) = -1$ максимум в $n-k$ різних точках. Таким чином, максимальна кількість точок, для яких $|Q(x)| = 1$ чи $|R(x)| = 1$, буде рівною $k+k+(n-k)+(n-k) = 2n$, що суперечить умові задачі про те, що їх є $2n+1$. Одержана суперечність і доводить незвідність многочлена $P(x)$. □

Задача 3.29. *Доведіть, що для будь-якого простого p многочлен $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ незвідний в $\mathbb{Z}[x]$.*

Розв'язання. Для всіх $x \neq 1$ виконується рівність $P(x) = \frac{x^p - 1}{x-1}$. Якщо $P(x)$ — звідний в $\mathbb{Z}[x]$, то і многочлен $Q(x) = P(x+1)$ також буде звідним в $\mathbb{Z}[x]$. Далі маємо

$$Q(x) = P(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + C_p^1 x^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}.$$

Оскільки многочлен $Q(x)$ — зведений, C_p^k ділиться на p при усіх $1 \leqslant k \leqslant p-1$ і $C_p^{p-1} = p$ не ділиться на p^2, то за ознакою Ейзенштейна многочлен $Q(x)$ незвідний в $\mathbb{Z}[x]$, тому і $P(x)$ — незвідний в $\mathbb{Z}[x]$, що і треба було довести. □

Задача 3.30. *Доведіть, що многочлен*

$$P(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$$

є незвідним в $\mathbb{Z}[x]$.

Розв'язання. Хоча 101 — просте число, ми не в змозі застосувати ознаку Ейзенштейна через число 102, яке не ділиться на 101. Тому скористаємося тим, що коли $P(x)$ — звідний в $\mathbb{Z}[x]$, то многочлен $Q(x) = P(x-1)$ також звідний в $\mathbb{Z}[x]$. Оскільки $Q(x) = (x-1)^{101} + 101(x-1)^{100} + 102$ і біноміальні коефіцієнти C_{101}^k, $1 \leqslant k \leqslant 100$ діляться на 101, то усі коефіцієнти многочлена $Q(x)$, крім старшого і вільного члена діляться на 101. Його вільний член $Q(0) = (-1)^{101} + 101(-1)^{100} + 102 = 202$ ділиться на 101 і не ділиться на 101^2, а його старший член дорівнює 1 і не ділиться на 101. Отже, за ознакою Ейзенштейна многочлен $Q(x)$ — незвідний, а тому незвідним є і многочлен $P(x)$. $\square$

Задача 3.31. *Доведіть, що для будь-якого натурального n многочлен*

$$P(x) = x^{2^n} + 1$$

незвідний в $\mathbb{Z}[x]$.

Розв'язання. Скористаємося ідеєю розв'язування попередньої задачі. Якщо $P(x)$ — звідний в $\mathbb{Z}[x]$, то і многочлен $Q(x) = P(x+1)$ також буде звідним в $\mathbb{Z}[x]$. Далі маємо

$$Q(x) = P(x+1) = (x+1)^{2^n} + 1 = x^{2^n} + C_{2^n}^1 x^{2^n-1} + C_{2^n}^2 x^{2^n-2} + \ldots + C_{2^n}^{2^n-1} x + 2.$$

Для усіх $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ біноміальні коефіцієнти $C_{2^n}^k$ діляться на 2. Дійсно, використовуючи рівність

$$C_{2^n}^k = \frac{2^n}{k} C_{2^n-1}^{k-1},$$

враховуючи те, що число $C_{2^n-1}^{k-1}$ — ціле, і обмеження на k, ми приходимо до висновку, що $C_{2^n}^k$ — парне. Оскільки $Q(x)$ — зведений многочлен, а його вільний член 2 не ділиться на $2^2 = 4$, то за ознакою Ейзенштейна робимо висновок, що він незвідний в $\mathbb{Z}[x]$, а це означає незвідність многочлена $P(x)$, що і треба було довести. $\square$

Задача 3.32. *Нехай p — просте число. Доведіть, що многочлен*

$$P(x) = x^{p-1} + 2x^{p-2} + 3x^{p-3} + \ldots + (p-1)x + p$$

незвідний в $\mathbb{Z}[x]$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що усі корені многочлена $P(x)$ за модулем більші 1. Нехай y — комплексний корінь многочлена $P(x)$, тоді

$$0 = (y-1)P(y) = y^p + y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots + y - p.$$

Нехай $|y| \leqslant 1$, тоді одержуємо:

$$p = \left| y^p + y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots + y \right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} 1 = p.$$

Із цих нерівностей випливає, що повинні бути лише знаки рівності. Це буде тоді і тільки тоді, коли $y = 1$. Але це неможливо, бо $P(1) = 1+2+3+\ldots+p > 0$.

Одержане протиріччя і доводить, що модуль кожного кореня многочлена $P(x)$ буде більший за 1.

Далі, припустимо, що $P(x) = Q(x)R(x)$, де $Q(x)$ і $R(x)$ — многочлени з цілими коефіцієнтами, степінь яких не менший за 1. Тоді $p = P(0) = Q(0)R(0)$. Оскільки p — просте, а $Q(0)$ і $R(0)$ — цілі числа, то остання рівність означає, що $Q(0) = \pm 1$ або $R(0) = \pm 1$. Не порушуючи загальності будемо вважати, що $Q(0) = \pm 1$. Це означає, що

$$Q(x) = x^k + a_{k-1}x + \ldots + a_1 x \pm 1,$$

де $k \geqslant 1$, $a_{k-1}, \ldots, a_1$ — цілі числа. Нехай $z_1, z_2, \ldots, z_k$ — усі корені многочлена $Q(x)$, тоді z_i — корені многочлена $P(x)$, тобто $|z_i| > 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Запишемо останню формулу Вієта для многочлена $Q(x)$:

$$z_1 z_2 \ldots z_k = (-1)^k (\pm 1).$$

Звідси слідує, що

$$1 = |z_1 z_2 \ldots z_k| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_k| > 1.$$

Одержана суперечність і доводить незвідність многочлена $P(x)$. □

Вправи для самостійного розв'язування

Вправа 1. *Знайдіть максимальне значення λ таке, що для будь-якого кубічного многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ з дійсними коефіцієнтами, всі корені якого дійсні невід'ємні числа, виконується нерівність*

$$P(x) \geqslant \lambda (x - a)^3$$

для всіх $x \geqslant 0$. При яких умовах буде виконуватися рівність?

(Математичні змагання Китаю, 1999 р.)

Вправа 2. *Доведіть, що коли два кубічних многочлени з цілими коефіцієнтами мають спільний ірраціональний корінь, то вони мають ще один спільний ірраціональний корінь.*

(Математичні змагання Польщі, 1966 р.)

Вправа 3. *Доведіть, що для будь-якого натурального n многочлен $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ ділиться на многочлен $x^2 + x + 1$.*

(Математичні змагання Бельгії, 1981 р.)

Вправа 4. *Доведіть, що коли коренями многочлена $x^2 + px + 1$ є числа a і b, а коренями многочлена $x^2 + qx + 1$ — числа c і d, то правильною буде наступна рівність*

$$(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = q^2 - p^2.$$

(Математичні змагання Великобританії, 1967 р.)

Вправа 5. *Нехай $P(x)$ — многочлен п'ятого степеня з п'ятьма різними цілими коренями. Яке найменше число ненульових коефіцієнтів може мати такий многочлен?*

(Математичні змагання США, 1985 р.)

Вправа 6. *Нехай* x_1, x_2, x_3 *— корені многочлена* $ax^3 - ax^2 + bx + b$, *де* $a, b \neq 0$. *Доведіть, що правильним буде наступне співвідношення*

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

(Математичні змагання Німеччини, 1970 р.)

Вправа 7. *Доведіть, що для будь-якого натурального* n *виконується рівність*

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

(Математичні змагання Румунії, 1970 р.)

Вправа 8. *Нехай* a *і* b *— два із чотирьох коренів многочлена* $P(x) = x^4 + x^3 - 1$. *Доведіть, що* ab *— корінь многочлена*

$$Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.$$

(Математичні змагання США, 1977 р.)

Вправа 9. *Доведіть, що для коренів* x_1 *і* x_2 *многочлена*

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2},$$

де $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}$, *виконується нерівність* $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

(Математичні змагання Болгарії, 1980 р.)

Вправа 10. *Многочлен* $P(x) = x^3 - 10x + 11$ *має корені* u, v *і* w. *Зайдіть значення виразу*

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v + \operatorname{arctg} w.$$

(Математичні змагання Угорщини, 2002 р.)

Вправа 11. *Многочлен* $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + 1$ *з невід'ємними коефіцієнтами має* n *дійсних коренів. Доведіть, що* $P(2) \geqslant 3^n$.

(Математичні змагання Угорщини, 1963 р.)

Вправа 12. *Нехай* $n \geqslant 3$ *і*

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0.$$

Відомо, що $a_{n-1} = -n$, $a_{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ *і усі корені многочлена* $P(x)$ *дійсні числа. Знайдіть інші коефіцієнти цього многочлена.*

(Математичні змагання Румунії, 1978 р.)

Вправа 13. *Многочлен*

$$ax^n - ax^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-2}x^2 - n^2 bx + b$$

з дійсними коефіцієнтами має рівно n *дійсних коренів. Доведіть, що всі ці корені рівні між собою.*

(Математичні змагання Болгарії, 1984 р.)

Вправа 14. *Чи існують дійсні числа* a, b *і* c *такі, що кожне із рівнянь* $ax^2 + bx + c = 0$ *і* $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1) = 0$ *мають по парі цілих коренів?*

(Математичні змагання Росії, 1997 р.)

Розділ 4

Числові послідовності на математичних олімпіадах

4.1. Знаходження загального члена послідовності

Під *числовими послідовностями* розуміють відображення $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ або $a\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, значення яких позначають через a_n, а саму числову послідовність — через (a_n) або $\{a_n\}$ (вказуючи, можливо, яких значень може набувати аргумент n: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$). Рівність виду $a_n = f(n)$, де $f(n)$ — алгебраїчний вираз із змінною n, називають *загальним членом* числової послідовності (a_n). Нерідко числові послідовності задаються *рекурентно*, тобто визначаються рівностями, які вказують на зв'язок кожного члена послідовності з кількома попередніми її членами. Часто в задачах послідовності задають саме рекурентно, а їх розв'язання передбачає знаходження формули загального члена послідовності. В цьому пункті ми на конкретних прикладах продемонструємо відомі на сьогодні методи знаходження формули загального члена послідовностей.

Спочатку розглянемо кілька задач, в яких для виведення формули n-го члена послідовності використовують функцію «ціла частина числа».

Задача 4.1. *Знайти формулу загального члена послідовності*

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots.$$

(Математичні змагання Німеччини, 1994 р.)

Розв'язання. Вивчаючи цю послідовність ми помічаємо, що m-й її член буде дорівнювати n тоді і тільки тоді, коли виконується наступна нерівність:

$$1+2+\ldots+(n-1)+1 \leqslant m \leqslant 1+2+\ldots+(n-1)+n,$$

тобто

$$\frac{(n-1)n}{2}+1 \leqslant m \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

Спробуємо звідси знайти n. Для цього перепишемо останню нерівність у еквівалентному вигляді:

$$n^2-n+2 \leqslant 2m \leqslant n^2+n.$$

Враховуючи, що m та n — натуральні числа і n^2-n — є числом парним, перепишемо останню нерівність у такому еквівалентному вигляді:

$$n^2-n+\frac{1}{4}<2m<n^2+n+\frac{1}{4}.$$

Звідки одержуємо, що

$$n-\frac{1}{2}<\sqrt{2m}<n+\frac{1}{2},$$

тобто

$$n<\sqrt{2m}+\frac{1}{2}<n+1.$$

Остання подвійна нерівність означає, що $n=\left[\sqrt{2m}+\frac{1}{2}\right]$.

Відповідь. $a_m=\left[\sqrt{2m}+\frac{1}{2}\right],\quad m\geqslant 1.$ □

Задача 4.2. *Знайти формулу загального члена послідовності* (x_n)*, яка визначається в такий спосіб:* $x_1=1$, $x_n=x_{n-1}+n$*, якщо* n *— непарне число, і* $x_n=x_{n-1}+(n-1)$*, якщо* n *— парне число.*

(Математичні змагання Польщі, 1994 р.)

Розв'язання. Якби наша послідовність була задана рекурентною рівністю: $x_n=x_{n-1}+n$, для всіх $n\geqslant 2$, то формула загального члена такої послідовності була б такою:

$$x_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Таку послідовність називають послідовністю трикутних чисел $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, де $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Якби наша послідовність була задана рекурентною рівністю: $x_n=x_{n-1}+$ $+(n-1)$, для всіх $n\geqslant 2$, то формула загального члена такої послідовності була б такою:

$$x_n=1+1+2+\ldots+(n-1)=1+T_{n-1}=\frac{n^2-n+2}{2}.$$

В нашому випадку

$$\frac{n^2-n+2}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{n^2+n}{2}.$$

Це означає, що формулу загального члена нашої послідовності треба шукати у вигляді $x_n=\dfrac{n^2+an+b}{2}$, а точніше у вигляді $x_n=\left[\dfrac{n^2+an+b}{2}\right]$. Виписавши декілька перших членів заданої послідовності, можна здогадатися, що $x_n=\left[\dfrac{n^2+1}{2}\right]$.

Покажемо, що знайдена формула задовольняє умові задачі. Дійсно,

$$x_n = \left[\frac{n^2+1}{2}\right] = \left[\frac{(n-1)^2+1}{2} + \frac{2(n-1)+1}{2}\right] =$$
$$= \left[\frac{(n-1)^2+1}{2} + \frac{1}{2}\right] + (n-1).$$

Якщо n — парне, то $\dfrac{(n-1)^2+1}{2}$ — ціле число, а тому

$$x_n = \left[\frac{(n-1)^2+1}{2} + \frac{1}{2}\right] + (n-1) = \left[\frac{(n-1)^2+1}{2}\right] + (n-1) = x_{n-1} + (n-1).$$

Якщо n — непарне, то $\dfrac{(n-1)^2}{2}$ — ціле число, а тому

$$x_n = \left[\frac{(n-1)^2+1}{2} + \frac{1}{2}\right] + (n-1) = \left[\frac{(n-1)^2}{2} + 1\right] + (n-1) =$$
$$= \left[\frac{(n-1)^2}{2}\right] + 1 + (n-1) = \left[\frac{(n-1)^2}{2} + \frac{1}{2}\right] + n = \left[\frac{(n-1)^2+1}{2}\right] + n =$$
$$= x_{n-1} + n.$$

□

Задача 4.3. *Натуральні числа $x_1, \ldots, x_7$ задовольняють таким рівностям: $x_6 = 144$ і $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$, для $n = 1, 2, 3, 4$. Знайти x_7.*

(Математичні змагання Польщі, 1997 р.)

Розв'язання. З умови задачі випливає, що виконуються рівності:

$$x_4 = x_3(x_2 + x_1),$$
$$x_5 = x_4(x_3 + x_2),$$
$$x_6 = x_5(x_4 + x_3),$$
$$x_7 = x_6(x_5 + x_4).$$

Перемножуючи перші три рівності і враховуючи, що $x_6 = 144$, одержимо рівність:

$$144 = x_3(x_2 + x_1)(x_3 + x_2)(x_4 + x_3). \tag{4.1}$$

Оскільки $x_1, \ldots, x_7$ — натуральні числа, тоді маємо:

$$x_4 = x_3(x_2 + x_1) \geqslant 2x_3,$$
$$x_5 = x_4(x_3 + x_2) \geqslant 2x_3(x_3 + 1) > 2x_3^2,$$
$$144 = x_6 = x_5(x_4 + x_3) > 2x_3^2(2x_3 + x_3) = 6x_3^3.$$

Звідки випливає, що $144 > 6x_3^3$, тобто $x_3 = 1$ або $x_3 = 2$.

1. Нехай $x_3 = 1$, тоді рівність (4.1) запишеться так:

$$144 = (x_2 + x_1)(1 + x_2)\big(x_4 + 1\big),$$
$$144 = (x_1 + x_2)(1 + x_2)(x_1 + x_2 + 1).$$

Числа $x_1 + x_2$ і $x_1 + x_2 + 1$ — послідовні натуральні числа, які є дільниками числа 144. Оскільки $144 = 2^4 \cdot 3^2$, то такими парами послідовних чисел можуть бути лише такі: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ або $(8, 9)$. Оскільки $x_1 + x_2 \geqslant 2$, то можливі лише наступні випадки.

а) Якщо $x_1 + x_2 = 2$, тоді $144 = 6(1 + x_2)$, тобто $x_2 = 23$, а $x_1 = -21$, що неможливо.

б) Якщо $x_1 + x_2 = 3$, тоді $144 = 12(1 + x_2)$, тобто $x_2 = 11$, а $x_1 = -8$, що неможливо.

в) Якщо $x_1 + x_2 = 8$, тоді $144 = 72(1 + x_2)$, тобто $x_2 = 1$, а $x_1 = 7$. Далі знаходимо: $x_4 = x_3(x_2 + x_1) = 8$, $x_5 = x_4(x_3 + x_2) = 16$, $x_6 = 144$, а

$$x_7 = x_6\big(x_5 + x_4\big) = 144 \cdot (16 + 8) = 3456.$$

2. Нехай $x_3 = 2$, тоді рівність (4.1) запишеться так:

$$144 = 2 \cdot (x_2 + x_1)(2 + x_2)\big(x_4 + 2\big),$$
$$144 = 2 \cdot (x_2 + x_1)(2 + x_2)(2x_2 + 2x_1 + 2),$$
$$36 = (x_1 + x_2)(2 + x_2)(x_1 + x_2 + 1).$$

Далі — аналогічно. Оскільки числа $x_1 + x_2$ і $x_1 + x_2 + 1$ — послідовні натуральні числа, які є дільниками числа 36 і $36 = 2^2 \cdot 3^2$, то такими парами послідовних чисел можуть бути лише такі: $(1, 2)$, $(2, 3)$ або $(3, 4)$. Оскільки $x_1 + x_2 \geqslant 2$, то можливі лише наступні випадки.

а) Якщо $x_1 + x_2 = 2$, тоді $36 = 6(2 + x_2)$, тобто $x_2 = 4$, а $x_1 = -2$, що неможливо.

б) Якщо $x_1 + x_2 = 3$, тоді $36 = 12(2 + x_2)$, тобто $x_2 = 1$, а $x_1 = 2$. Далі знаходимо: $x_4 = x_3(x_2 + x_1) = 6$, $x_5 = x_4(x_3 + x_2) = 18$, $x_6 = 144$, а

$$x_7 = x_6\big(x_5 + x_4\big) = 144 \cdot (18 + 6) = 3456.$$

Таким чином, в усіх випадках $x_7 = 3456$.

Відповідь. 3456. □

4.1.1. *Використання методу математичної індукції для відшукання формули загального члена послідовності*

При розв'язуванні олімпіадних задач на знаходження формули n-го члена послідовності, часто використовують метод математичної індукції. Коротко нагадаємо суть цього методу.

Нехай у нас є послідовність тверджень $T_1, T_2, T_3, \ldots$, причому відомо, що:

1) твердження T_1 істинне;

2) якщо деяке твердження T_k істинне, то наступне твердження T_{k+1} також істинне.

Тоді *принцип математичної індукції* стверджує: що всі твердження цієї послідовності істинні.

Спосіб міркувань, заснований на принципі математичної індукції, називають *методом математичної індукції*. При цьому доведення істинності твердження T_1, називають *базою індукції*, а доведення того, що з істинності твердження T_k випливає істинність твердження T_{k+1}, називають *індукційним кроком*.

Зазначимо, що існують й інші форми принципу математичної індукції, наприклад іноді зручно починати індукцію не з доведення істинності T_1, а з доведення істинності деякого T_k.

Перейдемо тепер до задач, пов'язаних з послідовностями, розв'язання яких передбачає використання методу математичної індукції.

Задача 4.4. *Функція* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *є такою, що*

1) $f(1) = 1996$*;*

2) $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 \cdot f(n), \quad (n > 1)$.

Знайдіть $f(1996)$.

(Математичні змагання Великобританії, 1996 р.)

Розв'язання. Спочатку, використовуючи умови 1 і 2, послідовно знаходимо:

$$f(1) = 1996,$$
$$f(1) + f(2) = 2^2 \cdot f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{f(1)}{3} = \frac{f(1)}{1+2},$$
$$f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 \cdot f(3) \Rightarrow f(3) = \frac{f(1)}{6} = \frac{f(1)}{1+2+3},$$
$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 \cdot f(4) \Rightarrow f(4) = \frac{f(1)}{10} = \frac{f(1)}{1+2+3+4}$$

і т.д.

З'являється *гіпотеза*:

$$f\left(n\right)=\frac{f\left(1\right)}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2\cdot f\left(1\right)}{n\left(n+1\right)}$$

для будь-якого натурального n. Справедливість того, що

$$f\left(n\right)=\frac{2f\left(1\right)}{n\left(n+1\right)}$$

для всіх $n\in\mathbb{N}$, доведемо *методом математичної індукції*.

База індукції. Для $n=1$ одержуємо:

$$f\left(1\right)=\frac{2f\left(1\right)}{1\cdot\left(1+1\right)}=\frac{2f\left(1\right)}{2}=f\left(1\right),$$

тобто для $n=1$ формула $f\left(n\right)=\frac{2f(1)}{n(n+1)}$ є правильною.

Крок індукції. Нехай формула $f\left(n\right)=\frac{2f(1)}{n(n+1)}$ буде правильною для усіх $n=1,2,\ldots,k-1$. Доведемо її справедливість для $n=k$.

Дійсно, з умови 2 маємо:

$$\begin{aligned}f\left(k\right)&=\frac{1}{k^2-1}\left(f\left(1\right)+f\left(2\right)+\ldots+f\left(k-2\right)\right)=\\&=\frac{1}{k^2-1}\left(f\left(1\right)+\frac{2f\left(1\right)}{2\cdot3}+\frac{2f\left(1\right)}{3\cdot4}+\ldots+\frac{2f\left(1\right)}{\left(k-1\right)k}\right)=\\&=\frac{2f\left(1\right)}{k^2-1}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{\left(k-1\right)k}\right)=\\&=\frac{2f\left(1\right)}{k^2-1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\\&=\frac{2f\left(1\right)}{k^2-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{2f\left(1\right)}{k\left(k+1\right)}.\end{aligned}$$

Таким чином, згідно із основним принципом математичної індукції $f\left(n\right)=\frac{2f(1)}{n(n+1)}$ для будь-якого натурального n. Зокрема, при $n=1996$, знаходимо, що $f\left(1996\right)=\frac{2}{1997}$.

Відповідь. $f\left(1996\right)=\frac{2}{1997}$.

Задача 4.5. *Послідовність чисел a_0, a_1, a_2, … задовольняє співвідношення*

$$a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}\left(a_{2m}+a_{2n}\right),$$

для всіх цілих невід'ємних m і n таких, що $m\geqslant n$. Знайдіть її загальний член, якщо відомо, що $a_1=1$.

(Всеросійська математична олімпіада, 1995 р.)

Розв'язання. При $n=0$ одержуємо:

$$a_m+a_m=\frac{1}{2}\left(a_{2m}+a_0\right),$$

а при $n = m$ одержуємо:

$$a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m}).$$

З цих двох рівностей знаходимо, що $a_{2m} = 4a_m$ і $a_0 = 0$, тобто $a_{2m} = 4a_m$ для всіх цілих $m \geqslant 0$. Звідси знаходимо, що $a_2 = 4$, $a_4 = 16$. Далі, при $m = 2$ і $n = 1$ одержуємо:

$$a_3 + a_1 = \frac{1}{2}\left(a_4 + a_2\right).$$

Звідки знаходимо, що $a_3 = 9$. Виникає *гіпотеза*: $a_k = k^2$, для всіх цілих $k \geqslant 1$. Доведення цієї рівності здійснимо індуктивно. *База індукції* — очевидна. *Крок індукції.* Припустимо, що $a_j = j^2$, для всіх $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Тоді при $m = k-1$ і $n = 1$ одержуємо:

$$a_k + a_{k-2} = \frac{1}{2}(a_{2k-2} + a_2).$$

Звідки одержуємо:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2}(a_{2k-2} + a_2) - a_{k-2} = \frac{1}{2}(4a_{k-1} + 4) - a_{k-2} = \\ &= 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2 = 2(k-1)^2 - (k-2)^2 + 2 = \\ &= 2k^2 - 4k + 2 - k^2 + 4k - 4 + 2 = k^2, \end{aligned}$$

що і завершує доведення кроку. Таким чином, згідно з основним принципом математичної індукції, одержуємо, що $a_n = n^2$, для всіх цілих $n \geqslant 0$. □

Задача 4.6. *Послідовність $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб:*

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{5}{2}, \quad u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1$$

для всіх $n \geqslant 1$. Доведіть, що коли $n \geqslant 1$, то $[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$, де $[x]$ — найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Розв'язання. Будемо обчислювати декілька перших членів заданої послідовності, і виділяти в них цілу частину і робити спробу її подачі у потрібному вигляді:

$$u_0 = 2 = 1 + 1 = 2^{\frac{2^0 - (-1)^0}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^0 - (-1)^0\right)}{3}},$$

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^1 - (-1)^1}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^1 - (-1)^1\right)}{3}},$$

$$u_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^2 - (-1)^2}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^2 - (-1)^2\right)}{3}},$$

$$u_3 = \frac{65}{8} = 8 + \frac{1}{8} = 2^{\frac{2^3-(-1)^3}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^3-(-1)^3\right)}{3}}.$$

Таким чином, виникає *гіпотеза*: для будь-якого цілого невід'ємного n виконується співвідношення

$$u_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^n-(-1)^n\right)}{3}}.$$

Доведемо це твердження методом математичної індукції. *База індукції* — очевидна. *Крок індукції.* Припустимо, що

$$u_j = 2^{\frac{2^j-(-1)^j}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^j-(-1)^j\right)}{3}},$$

для всіх $j = 0, 1, \ldots, n$, тоді

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1 = \\
&= \left(2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^n-(-1)^n\right)}{3}}\right)\left(\left(2^{\frac{2^{n-1}-(-1)^{n-1}}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right)}{3}}\right)^2 - 2\right) - \frac{5}{2} = \\
&= \left(2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^n-(-1)^n\right)}{3}}\right)\left(2^{\frac{2^n+2(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^n+2(-1)^n\right)}{3}}\right) - \frac{5}{2} = \\
&= 2^{\frac{2^n-(-1)^n+2^n+2(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{2^n-(-1)^n-2^n-2(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-2^n+(-1)^n+2^n+2(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^n-(-1)^n+2^n+2(-1)^n\right)}{3}} - \frac{5}{2} = \\
&= 2^{\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}} + 2^{-(-1)^n} + 2^{(-1)^n} + 2^{\frac{-\left(2^{n+1}+(-1)^n\right)}{3}} - \frac{5}{2} = \\
&= 2^{\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}} + \frac{5}{2} + 2^{\frac{-\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)}{3}} - \frac{5}{2} = \\
&= 2^{\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)}{3}},
\end{aligned}$$

що і завершує доведення кроку.

Таким чином, згідно з основним принципом математичної індукції, одержуємо, що

$$u_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{\frac{-\left(2^n-(-1)^n\right)}{3}},$$

для всіх $n \geqslant 1$.

Далі, доведемо, що

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

є натуральним числом для всіх $n \geqslant 1$. Дійсно, якщо $n = 2k$, де $k \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3} = \frac{2^{2k}-(-1)^{2k}}{3} = \frac{4^k-1}{3} = \frac{(4-1)\left(4^{k-1}+4^{k-2}+\ldots+4+1\right)}{3} = \\
= 4^{k-1}+4^{k-2}+\ldots+4+1$$

є цілим числом. Якщо $n = 2k-1$, де $k \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3} = \frac{2^{2k-1}-(-1)^{2k-1}}{3} = \frac{2^{2k-1}+1^{2k-1}}{3} =$$
$$= \frac{(2+1)\left(2^{2k-2}-2^{2k-3}+\ldots-2+1\right)}{3} = 2^{2k-2}-2^{2k-3}+\ldots-2+1,$$

також є натуральним числом.

Таким чином, $2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ — ціле додатне число, а $2^{\frac{-\left(2^n-(-1)^n\right)}{3}}$ — число із проміжку від 0 до 1. Тому, $[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ при всіх $n \geqslant 1$. □

Задача 4.7. *Послідовність $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб:*

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1 \text{ і } u_{n+3}u_n - u_{n+2}u_{n+1} = n!, \quad n \geqslant 0.$$

Доведіть, що u_n є цілим числом для будь-якого $n \geqslant 3$.

(Математичні змагання США, 2005)

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $u_{n+3} = \dfrac{u_{n+2}u_{n+1}}{u_n} + \frac{n!}{u_n}$, для всіх $n \geqslant 0$. Обчислимо декілька перших членів заданої послідовності, для відшукання закономірності:

$$u_3 = \frac{u_2u_1}{u_0} + \frac{0!}{u_0} = \frac{1\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 2,$$
$$u_4 = \frac{u_3u_2}{u_1} + \frac{1!}{u_1} = \frac{2\cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = 3,$$
$$u_5 = \frac{u_4u_3}{u_2} + \frac{2!}{u_2} = \frac{3\cdot 2}{1} + \frac{2}{1} = 4\cdot 2,$$
$$u_6 = \frac{u_5u_4}{u_2} + \frac{2!}{u_2} = \frac{4\cdot 2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} = 4\cdot 3 + 1\cdot 3 = 5\cdot 3,$$
$$u_7 = \frac{u_6u_5}{u_3} + \frac{3!}{u_3} = \frac{5\cdot 3\cdot 4\cdot 2}{3} + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3} = 5\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 2 = 6\cdot 4\cdot 2,$$
$$u_8 = \frac{u_7u_6}{u_4} + \frac{4!}{u_4} = \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 5\cdot 3}{4\cdot 2} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 2} = 6\cdot 5\cdot 3 + 5\cdot 3 = 7\cdot 5\cdot 3,$$

тобто помічаємо, що

$$u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\cdot\cdot\cdot, \qquad n \geqslant 3,$$

де кількість дужок у цій формулі визначається лише додатними їхніми значеннями. Справедливість цієї формули доведемо методом математичної індукції. *База індукції* є очевидною. *Крок індукції.* Припустимо, що ця формула має місце для усіх $n = 3, 4, 5, \ldots, m, m+1, m+2$. Доведемо, що вона має місце і для $n = m+3$. Справді,

$$u_{n+3}=\frac{u_{n+2}u_{n+1}+n!}{u_n}=\frac{(n+1)(n-1)(n-3)\cdot\ldots\cdot n(n-2)(n-4)\cdot\ldots+n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdot\ldots}=$$
$$=\frac{(n+1)n!+n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdot\ldots}=\frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\cdot\ldots}=(n+2)n(n-2)\cdot\ldots.$$

Таким чином, згідно з основним принципом математичної індукції, одержуємо, що $u_n=(n-1)(n-3)(n-5)\cdot\ldots$ для будь-якого натурального $n\geqslant 3$, тобто u_n — ціле число для всіх $n\geqslant 3$. Це і завершує доведення. □

Задача 4.8. *Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ визначається в такий спосіб:*

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{n^2}{a_n}+2,\quad n\geqslant 1.$$

Довести, що для всіх $n\geqslant 4$ виконується рівність $[a_n]=n$.

(Всеукраїнська математична олімпіада, 1998 р.)

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що при $n\geqslant 4$ виконуються нерівності $n\leqslant a_n\leqslant \frac{n^2}{n-1}$. *База індукції* перевіряється безпосереднім підрахунком. *Крок індукції* здійснимо в такий спосіб. Спочатку доведемо, що функція $f_n(x)=\frac{x}{n^2}+\frac{n^2}{x}+2$ монотонно спадає на проміжку $\left(0;n^2\right]$. Справді, на вказаному проміжку її похідна від'ємна:

$$f_n'(x)=\frac{1}{n^2}-\frac{n^2}{x^2}=\frac{\left(x-n^2\right)\left(x+n^2\right)}{n^2x^2}<0.$$

Тому якщо $n\leqslant a_n\leqslant\frac{n^2}{n-1}$, то, внаслідок спадання функції $f_n(x)=\frac{x}{n^2}+\frac{n^2}{x}+2$ на проміжку $\left(0;\ n^2\right]$, маємо: $f_n(n)\geqslant f_n(a_n)\geqslant f_n\left(\frac{n^2}{n-1}\right)$. Звідси й випливає, що

$$\frac{(n+1)^2}{n}\geqslant a_{n+1}\geqslant\frac{1}{n-1}+n+1>n+1,$$

чим і завершується індукційний крок.

Отже,

$$a_{n+1}=f_n(a_n)\geqslant f\left(\frac{n^2}{n-1}\right)=\frac{n^2}{n-1}\geqslant a_n,\quad (n\geqslant 4)$$

тобто задана послідовність є неспадною.

Для завершення доведення потрібно для a_n установити більш «тонку» оцінку зверху: $a_n<n+1, n\geqslant 4$. Знову застосуємо індукцію. Для $n=4$ і $n=5$ перевіряємо безпосередньо. Покажемо, як потрібна оцінка при $n\geqslant 6$ одержується з попередніх нерівностей. Оскільки

$$n<\frac{(n-1)^2}{n-2}\leqslant a_n\leqslant\frac{n^2}{n-1}<n^2,$$

то, враховуючи монотонність функції $f_n(x)$, одержуємо:

$$a_{n+1} = f_n(a_n) \leqslant f_n\left(\frac{(n-1)^2}{n-2}\right) < n+2 = (n+1)+1.$$

Ця оцінка доводить, що для $n \geqslant 6$ виконується нерівність $a_n < n+1$. Оскільки $n < a_n < n+1$, то $[a_n] = n$, що і треба було довести. □

4.1.2. *Знаходження формули загального члена зворотних послідовностей*

Нехай ми маємо послідовність (x_n). Якщо існують натуральне число k і числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такі, що починаючи з деякого номера n_0 для всіх $n \geqslant n_0$ виконується співвідношення

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n \quad (n \geqslant 1),$$

то послідовність (x_n) називається *зворотною послідовністю порядку* k, а останнє співвідношення — *зворотним рівнянням порядку* k.

Для більш глибокого вивчення зворотних послідовностей рекомендуємо читачам книжку [**5**]. Тут ми детальніше зупинимось на зворотних послідовностях другого порядку.

Отже, розглянемо послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, що задається в такий спосіб:

$$x_1 = a, x_2 = b \text{ і } x_{n+2} = ux_{n+1} + vx_n, \quad n \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Для знаходження її загального члена здійснюють таку процедуру.

Тимчасово «забудемо» про перші два члени послідовності і спробуємо відшукати геометричну прогресію, що задовольняє рекурентне співвідношення з (4.2). Тобто припустимо, що загальний член послідовності (x_n) має вигляд:

$$x_n = \lambda^n,$$

де λ — деяке дійсне число, $\lambda \neq 0$ і $\lambda \neq 1$. Підставляючи x_n в рекурентну формулу, одержимо рівність $\lambda^{n+2} = u \cdot \lambda^{n+1} + v \cdot \lambda^n$, тобто $\lambda^n\left(\lambda^2 - u\lambda - v\right) = 0$. Оскільки $\lambda \neq 0$, то остання рівність нам дає, що

$$\lambda^2 - u\lambda - v = 0. \tag{4.3}$$

Останнє рівняння називають *характеристичним рівнянням* для послідовності, заданої рекурентною формулою $x_{n+2} = ux_{n+1} + vx_n$.

Характеристичне рівняння (4.3) може мати або два різних дійсних корені, або один дійсний корінь кратності 2, або два комплексних корені.

Припустимо, що характеристичне рівняння має два різних дійсних корені p та q. Тоді $x_n = p^n$ і $x_n = q^n$ — дві різних послідовності, які задовольняють рекурентне співвідношення $x_{n+2} = ux_{n+1} + vx_n$. Більше того, усі послідовності, загальний член яких має вигляд $x_n = c_1p^n + c_2q^n$, де c_1 і c_2 — довільні числа, задовольняють таке рекурентне співвідношення. «Згадавши» про перші два члени послідовності, ми можемо із умов $c_1p + c_2q = x_1$ і $c_1p^2 + c_2q^2 = x_2$ визначити невідомі коефіцієнти c_1 і c_2. Таким чином, у цьому випадку задані перші два члени послідовності однозначно визначають числа c_1 і c_2, а ці знайдені числа однозначно визначають формулу загального члена заданої рекурентно послідовності: $x_n = c_1p^n + c_2q^n$, для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Якщо характеристичне рівняння має один дійсний корінь кратності 2 $p = \frac{u}{2}$ (це буде у випадку, коли $u^2 + 4v = 0$), то безпосередньою перевіркою можна переконатись, що послідовності $x_n = \left(\frac{u}{2}\right)^n$ і $x_n = n \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^n$ задовольняють рекурентне співвідношення з (4.2). Можна довести, що усі послідовності, які задовольняють те рекурентне співвідношення, мають вигляд $x_n = c_1p^n + c_2nq^n$. Використовуючи початкові умови з співвідношень $p \cdot c_1 + q \cdot c_2 = x_1$ і $p^2 \cdot c_1 + 2q^2 \cdot c_2 = x_2$, визначають невідомі коефіцієнти c_1 і c_2. Таким чином, і у цьому випадку задані перші два члени послідовності однозначно визначають числа c_1 і c_2, а ці знайдені числа однозначно визначають формулу загального члена заданої рекурентно послідовності: $x_n = c_1p^n + c_2nq^n$, для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Якщо ж характеристичне рівняння має комплексні корені p і $\bar{p}$, то для них повторюються міркування першого випадку. Тобто в цьому випадку загальний член послідовності матиме вигляд $x_n = c_1p^n + c_2\bar{p}^n$, а значення c_1 і c_2 визначаються із початкових умов.

Тепер перейдемо до розв'язування задач математичних олімпіад, в яких з'являються зворотні послідовності.

Задача 4.9. *Нехай послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ дійсних чисел визначається в такий спосіб: $a_0 = a_1 = 1$ і $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$, для всіх $n \geqslant 1$. Доведіть, що $2a_n - 1$ — квадрат цілого числа.*

(Математична олімпіада Румунії, 2002 р.)

Розв'язання. Використовуючи означення заданої послідовності за допомогою рекурентного співвідношення, послідовно знаходимо декілька перших її членів: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_3 = 181$, $a_4 = 2521$ і т.д. Тоді значення $2a_0 - 1 = 1$, $2a_1 - 1 = 1$, $2a_2 - 1 = 25$, $2a_3 - 1 = 361$, $2a_4 - 1 = 2521$ і т.д. — квадрати цілих чисел 1, 1, 5, 19, 71, і т.д. відповідно. Як бачимо, по декількох перших членах нашої послідовності, твердження задачі виконується. Але спроби віднайти закономірність і за допомогою методу математичної індукції довести твердження задачі для всіх $n \geqslant 0$ виявилися марними. Єдине, що легко доводиться методом математичної індукції, це те, що всі члени нашої послідовності — цілі числа. Дійсно, якщо всі числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ і a_n — цілі, то і число $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$ також ціле. От і все, поки що.

Тоді спробуємо з іншого боку. Оскільки задане рекурентне співвідношення має вигляд (4.2), то розглянемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 = 14\lambda - 1,$$

тобто

$$\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0.$$

Його коренями будуть

$$\lambda_{1,2} = \frac{14 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 7 \pm 4\sqrt{3} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2.$$

Це означає, що загальний член нашої послідовності матиме вигляд:

$$a_n = c_1\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + c_2\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}, \quad n \geqslant 0,$$

де сталі множники c_1 і c_2 підлягають визначенню. Оскільки $a_0 = 1$ і $a_1 = 1$, то $c_1 + c_2 = 1$ і $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 c_1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 c_2 = 1$. Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що

$$c_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$
$$c_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Таким чином, загальний член нашої послідовності має вигляд:

$$a_n = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + \frac{2+\sqrt{3}}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}, \quad n \geqslant 0.$$

Тепер спробуємо обчислити значення виразу $2a_n - 1$ для кожного $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} 2a_n - 1 &= \frac{2-\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + \frac{2+\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n} - 1 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n} - 1 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)^2 = (b_n)^2, \end{aligned}$$

де

$$b_n = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n, \quad n \geqslant 0.$$

Доведемо, що b_n — ціле число для всіх $n \geqslant 0$. Оскільки

$$b_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} = -1,$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$$

і

$$b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}, \quad n \geqslant 0,$$

то індукцією по n отримуємо, що b_n — ціле число для всіх $n \geqslant 0$. Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 4.10. *Нехай послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ цілих чисел визначається в такий спосіб: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ і $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, для всіх $n \geqslant 0$. Доведіть, що a_n ділиться на 2^k тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 2^k, де k — натуральне.*

(Shortlist IMO, 1988)

Розв'язання. Знайдемо загальний член заданої послідовності. Оскільки задане рекурентне співвідношення має вигляд (4.2), то розглянемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 = 2\lambda + 1,$$

тобто

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Це означає, що загальний член нашої послідовності матиме вигляд:

$$a_n = c_1\left(1+\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(1-\sqrt{2}\right)^n, \quad n \geqslant 0,$$

де сталі множники c_1 і c_2 підлягають визначенню. Оскільки $a_0 = 0$ і $a_1 = 1$, то $c_1 + c_2 = 0$ і $\left(1+\sqrt{2}\right)c_1 + \left(1-\sqrt{2}\right)c_2 = 1$. Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ і $c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Таким чином, загальний член нашої послідовності має вигляд:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right), \quad n \geqslant 0.$$

Розглянемо нову послідовність $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ цілих чисел, для якої $b_0 = b_1 = 2$ і $b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n, n \geqslant 0$. Ця послідовність має інші початкові два члени, але ту ж саму рекурентну формулу. Тому, аналогічно, знаходимо її загальний член:

$$b_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n, \quad n \geqslant 0.$$

А тепер, маючи загальні члени цих двох послідовностей цілих чисел, відмітимо ряд їхніх властивостей. Для початку помічаємо, що $a_{2n} = a_n b_n$, для усіх $n \geqslant 0$. Справді,

$$a_{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right) = a_n b_n.$$

Далі, якщо n — непарне число, то a_n — також непарне число. Дійсно, $a_1 = 1$ — непарне число. Якщо для непарного m число a_m — непарне, то за рекурентним співвідношенням $a_{m+2} = 2a_{m+1} + a_m$ — також непарне, як сума парного і непарного чисел. Тому за індукцією одержуємо, що при всіх непарних n число a_n також непарне.

Далі, при всіх $n \geqslant 0$ число b_n ділиться на 2 і не ділиться на 4. Дійсно, $b_0 = b_1 = 2$, а з того, що для всіх $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ виконується рівність $b_i = 2(2c_i + 1)$, де c_i — цілі числа, одержуємо, що

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} = 2(2(2c_n + 1)) + 2(2c_{n-1} + 1) =$$
$$= 8c_n + 4c_{n-1} + 6 = 2(2(2c_n + c_{n-1} + 1) + 1) = 2(2c_{n+1} + 1).$$

Тому за індукцією одержуємо, що при всіх $n \geqslant 0$ число b_n ділиться на 2 і не ділиться на 4.

Далі, нехай m — непарне число, тоді $a_{2m} = a_m b_m$ ділиться на 2 і не ділиться на 4. Припустимо, що $a_{2^k m}$ ділиться на 2^k і не ділиться на 2^{k+1}. Це означає, що $a_{2^k m} = 2^k(2d_{2^k m} + 1)$, де $d_{2^k m}$ — ціле число. Тоді

$$a_{2^{k+1}m} = a_{2^k m} b_{2^k m} = 2^k(2d_{2^k m} + 1) \cdot 2(2c_{2^k m} + 1) = 2^{k+1} \cdot l,$$

де $l = (2d_{2^k m} + 1)(2c_{2^k m} + 1)$ — непарне число. Це означає, що $a_{2^{k+1}m}$ ділиться на 2^{k+1} і не ділиться на 2^{k+2}. Тому за індукцією ми одержуємо, що a_n ділиться на 2^k і не ділиться на 2^{k+1} тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 2^k і не ділиться на 2^{k+1}. Це і завершує розв'язання. □

Задача 4.11. *Нехай* $a_0 = a_1 = 5$ *і* $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{98}$, $n \geqslant 1$. *Доведіть, що* $\frac{a_n+1}{6}$ — *квадрат цілого числа.*

(Математична олімпіада США, 1998 р.)

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$a_{n+1} = 98a_n - a_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Знайдемо загальний член заданої послідовності. Оскільки рекурентне співвідношення має вигляд (4.2), то розглянемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 = 98\lambda - 1,$$

тобто

$$\lambda^2 - 98\lambda + 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_{1,2} = \frac{98 \pm 40\sqrt{6}}{2} = 49 \pm 20\sqrt{6}$. Це означає, що загальний член нашої послідовності матиме вигляд:

$$a_n = c_1\left(49 + 20\sqrt{6}\right)^n + c_2\left(49 - 20\sqrt{6}\right)^n, \quad n \geqslant 0,$$

де сталі множники c_1 і c_2 підлягають визначенню. Оскільки $a_0 = 5$ і $a_1 = 5$, то $c_1 + c_2 = 5$ і $\left(49+20\sqrt{6}\right)c_1 + \left(49-20\sqrt{6}\right)c_2 = 5$. Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $c_1 = \frac{5-2\sqrt{6}}{2}$ і $c_2 = \frac{5+2\sqrt{6}}{2}$. Таким чином, загальний член нашої послідовності має вигляд:

$$a_n = \frac{5-2\sqrt{6}}{2}\left(49+20\sqrt{6}\right)^n + \frac{5+2\sqrt{6}}{2}\left(49-20\sqrt{6}\right)^n, \quad n \geqslant 0.$$

Оскільки $49 \pm 20\sqrt{6} = \left(5 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$, то формулу загального члена можна переписати в такому вигляді:

$$a_n = \frac{5-2\sqrt{6}}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2n} + \frac{5+2\sqrt{6}}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2n}, \quad n \geqslant 0.$$

Нехай $b_n = \frac{a_n+1}{6}$, $n \geqslant 0$. Нам треба довести, що $b_n = (c_n)^2$, де c_n — цілі числа, при $n \geqslant 0$. Оскільки $a_0 = a_1 = 5$, то $b_0 = b_1 = 1$, тобто $c_0 = c_1 = 1$. Далі маємо:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2n} + \frac{5+2\sqrt{6}}{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2n} + 1}{6} = \\
&= \frac{\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2n} + \left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2n} + 2}{12} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2n} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2n} + 2}{12} = \\
&= \frac{\left(\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n}\right)^2}{12} = \\
&= \left(\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n}}{2\sqrt{3}}\right)^2 = (c_n)^2,
\end{aligned}$$

де

$$c_n = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n} + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n}}{2\sqrt{3}}, \quad n \geqslant 0.$$

Залишилося довести, що c_n — ціле число. Оскільки загальний член послідовності $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ має вигляд

$$c_n = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(5+2\sqrt{6}\right)^n + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(5-2\sqrt{6}\right)^n, \quad n \geqslant 0,$$

то її рекурентне задання буде таким: $c_0 = c_1 = 1$ і $c_{n+2} = 10c_{n+1} - c_n, \quad n \geqslant 0$. Звідси індуктивно випливає, що c_n — цілі числа при всіх $n \geqslant 0$, що і завершує розв'язання задачі, бо $\frac{a_n+1}{6} = (c_n)^2$ — квадрат цілого числа c_n. □

Задача 4.12. *Нехай* $a_1 = a_2 = 1$ *і* $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 4$*, для всіх натуральних* n*. Доведіть, що* a_n *— квадрат цілого числа при всіх* $n \geqslant 1$.

(Математична олімпіада Угорщини, 2003 р.)

Розв'язання. Спочатку спробуємо визначити нову послідовність через задану таким чином, щоб її рекурентне співвідношення було типу (4.2). Нехай $y_n = x_n - \alpha$, де α — константа, яка підлягає визначенню. Тоді $x_n = y_n + \alpha$ і, записавши рекурентне співвідношення для заданої послідовності, одержимо:

$$y_{n+2} + \alpha = 14(y_{n+1} + \alpha) - (y_n + \alpha) - 4,$$
$$y_{n+2} = 14y_{n+1} - y_n + (12\alpha - 4).$$

Якщо покладемо $12\alpha - 4 = 0$, тобто $\alpha = \frac{1}{3}$, то нова послідовність буде визначатися в такий спосіб:

$$y_1 = y_2 = \frac{2}{3} \text{ і } y_{n+2} = 14y_{n+1} - y_n, \quad n \geqslant 1.$$

Записавши для неї характеристичне рівняння $\lambda^2 = 14\lambda - 1$, знаходимо: $\lambda_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Тому

$$y_n = c_1\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n + c_2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n,$$

де константи c_1 і c_2 знаходимо із системи:

$$\begin{cases} c_1\left(7 - 4\sqrt{3}\right) + c_2\left(7 + 4\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}, \\ c_1\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^2 + c_2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо, що

$$c_1 = \frac{26 + 15\sqrt{3}}{6} \text{ і } c_2 = \frac{26 - 15\sqrt{3}}{6}.$$

Таким чином, загальний член нової послідовності матиме вигляд:

$$y_n = \frac{26 + 15\sqrt{3}}{6}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n + \frac{26 - 15\sqrt{3}}{6}\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n, \quad n \geqslant 1.$$

Тоді

$$x_n = y_n + \frac{1}{3} = \frac{26 + 15\sqrt{3}}{6}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n + \frac{26 - 15\sqrt{3}}{6}\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{26 + 15\sqrt{3}}{6}\left(2 - \sqrt{3}\right)^{2n} + \frac{26 - 15\sqrt{3}}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2n} + 1\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right)^2 + \left(\frac{5 - 3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right)^2 + 1\right) =$$
$$= \left(\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right)^2 + \left(\frac{5 - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right)^2 + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(\frac{9+5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)^n \right)^2 + \left(\frac{9-5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right)^2 + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(\frac{9+5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \frac{9-5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right)^2 = (z_n)^2,$$

де

$$z_n = \frac{9+5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \frac{9-5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^n, \quad n \geqslant 1.$$

Це означає, що рекурентне задання цієї послідовності має вигляд: $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ і $z_{n+2} = 4z_{n+1} - z_n,\ n \geqslant 1$. Звідси за індукцією випливає, що z_n — ціле число, при всіх натуральних n, що і треба було довести. □

Задача 4.13. *Нехай $a_1 = 1$ і $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 3}, n \geqslant 1$. Доведіть, що $a_{3n+1} = a_{n+1}\left(4a_{n+1}^2 - 3\right)$ для всіх натуральних n.*

(Математична олімпіада Австрії, 2002 р.)

Розв'язання. Із рекурентного співвідношення випливає, що $a_2 = 2$ і $a_{n+1} \geqslant 2a_n > a_n > 0$ для всіх натуральних n, бо $a_1 = 1$. Спробуємо із заданого рекурентного співвідношення знайти співвідношення, яке б здійснювало б «рекурсію в зворотному порядку», тобто спробуємо виразити a_n через a_{n+1}. Маємо

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 3},$$
$$a_{n+1} - 2a_n = \sqrt{3a_n^2 - 3},$$
$$(a_{n+1} - 2a_n)^2 = 3a_n^2 - 3,$$
$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + 4a_n^2 = 3a_n^2 - 3,$$
$$a_n^2 - 4a_{n+1}a_n + \left(a_{n+1}^2 + 3\right) = 0.$$

Розв'язавши останню рівність, як квадратне рівняння відносно a_n, знаходимо:

$$a_n = 2a_{n+1} \pm \sqrt{3a_{n+1}^2 - 3}.$$

Оскільки $a_n < a_{n+1}$, то $a_n = 2a_{n+1} - \sqrt{3a_{n+1}^2 - 3}$. Ця формула дозволяє продовжити нашу послідовність в інший бік: $a_1 = 1$, $a_0 = 2$.Таким чином, наша послідовність, яка доповнена нульовим початковим членом $a_0 = 2$, задовольняє таке співвідношення: $a_{n-1} = 2a_n - \sqrt{3a_n^2 - 3}, \quad n \geqslant 1$. Із цих двох «рекурсивних» формул, шляхом їхнього додавання, одержуємо нову рекурентну формулу, типу (4.2):

$$a_0 = 2, a_1 = 1 \text{ і } a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Це дає можливість зробити висновок, що всі члени нашої послідовності — натуральні числа, а також знайти її загальний член:

$$\lambda^2 = 4\lambda - 1,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

тобто $a_n = c_1\big(2+\sqrt{3}\big)^n + c_2\big(2-\sqrt{3}\big)^n$, для $n \geqslant 0$. Оскільки $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, то $c_1 + c_2 = 2$ і $c_1\left(2+\sqrt{3}\right) + c_2\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$. Звідки знаходимо, що $c_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ і $c_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Таким чином,

$$a_n = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\big(2+\sqrt{3}\big)^n + \frac{2+\sqrt{3}}{2}\big(2-\sqrt{3}\big)^n, \quad n \geqslant 0.$$

Враховуючи, що $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 1$, одержуємо:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\big(2+\sqrt{3}\big)^{n-1} + \big(2-\sqrt{3}\big)^{n-1}\right), \quad n \geqslant 0.$$

Тепер вже просто доводиться потрібне співвідношення для нашої послідовності:

$$\begin{aligned}
a_{3n+1} &= \frac{1}{2}\left(\big(2+\sqrt{3}\big)^{3n} + \big(2-\sqrt{3}\big)^{3n}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\big(2+\sqrt{3}\big)^{n} + \big(2-\sqrt{3}\big)^{n}\right)\left(\big(2+\sqrt{3}\big)^{2n} - \big(2+\sqrt{3}\big)^{n}\big(2-\sqrt{3}\big)^{n} + \big(2-\sqrt{3}\big)^{2n}\right) = \\
&= a_{n+1}\left(\big(2+\sqrt{3}\big)^{2n} + 2\big(2+\sqrt{3}\big)^{n}\big(2-\sqrt{3}\big)^{n} + \big(2-\sqrt{3}\big)^{2n} - 3\big(2+\sqrt{3}\big)^{n}\big(2-\sqrt{3}\big)^{n}\right) = \\
&= a_{n+1}\left(\left(\big(2+\sqrt{3}\big)^{n} + \big(2-\sqrt{3}\big)^{n}\right)^2 - 3\right) = a_{n+1}\left((2a_{n+1})^2 - 3\right) = a_{n+1}\left(4a_{n+1}^2 - 3\right),
\end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Задача 4.14. *Послідовність дійсних чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *визначається в такий спосіб:* $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ *і* $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$, *для всіх* $n \geqslant 1$. *Знайдіть формулу для обчислення загального члена цієї послідовності.*

Розв'язання. З умови задачі очевидно випливає, що всі члени послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є цілими числами. Позначимо $b_n = (-1)^n a_n$ для всіх натуральних n. Тоді нова послідовність цілих чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ визначатиметься в такий спосіб: $b_1 = -a_1 = -2$, $b_2 = a_2 = 8$ і $b_{n+2} = -3b_{n+1} - b_n + 5$, для всіх $n \geqslant 1$. Знову позначимо $c_n = b_n - \alpha$, для всіх натуральних $n \geqslant 1$ і α — деяка константа, яка підлягатиме означенню. Тоді $b_n = c_n + \alpha$ і рекурентна формула для послідовності $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ перепишеться так:

$$c_{n+2} + \alpha = -3(c_{n+1} + \alpha) - (c_n + \alpha) + 5,$$

тобто

$$c_{n+2} = -3c_{n+1} - c_n + (5 - 5\alpha).$$

Покладаючи $\alpha = 1$, ми одержимо нову послідовність $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка визначатиметься в такий спосіб: $c_1 = b_1 - 1 = -3$, $c_2 = b_2 - 1 = 7$ і $c_{n+2} = -3c_{n+1} - c_n$, для всіх натуральних $n \geqslant 1$. Зайдемо загальний член послідовності $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Записавши для неї характеристичне рівняння $\lambda^2 = -3\lambda - 1$, знаходимо: $\lambda_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Тому

$$c_n = d_1\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + d_2\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

де константи d_1 і d_2 знаходимо із системи:

$$\begin{cases} d_1\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) + d_2\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = -3, \\ d_1\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + d_2\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо, що $d_1 = d_2 = 1$. Таким чином, загальний член послідовності $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ матиме вигляд:

$$c_n = \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

для всіх натуральних $n \geqslant 1$. Далі знаходимо, що загальний член послідовності $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ матиме вигляд:

$$b_n = \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 1,$$

для всіх натуральних $n \geqslant 1$. А загальний член заданної послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, матиме вигляд:

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n,$$

для всіх натуральних $n \geqslant 1$, бо $b_n = (-1)^n a_n$. □

Задача 4.15. *Доведіть, що для будь-якого натурального n число $x_n = C_{2n+1}^0 \cdot 2^{2n} + C_{2n+1}^2 \cdot 2^{2n-2} \cdot 3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n-2} \cdot 2^2 \cdot 3^{n-1} + C_{2n+1}^{2n} \cdot 3^n$ є сумою квадратів двох послідовних цілих чисел.*

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Румунія, 1999 р.)

Розв'язання. Оскільки задане число x_n є частиною розкладу бінома Ньютона, то легко перевірити, що

$$x_n = \frac{1}{4}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Нам треба довести, що для будь-якого натурального n число x_n можна подати як суму квадратів двох послідовних цілих чисел. Спочатку спробуємо подати x_n просто як суму квадратів двох чисел:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{4}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right)= \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1}\right)= \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{4n+2}}{2^{2n+3}}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^{4n+2}}{2^{2n+3}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{4n+2}+\left(\sqrt{3}-1\right)^{4n+2}}{2^{2n+3}}= \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{4n+2}-2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}-1\right)^{4n+2}}{2^{2n+3}}+ \\
&\qquad + \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}}{2^{2n+3}}= \\
&= \frac{\left(\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}\right)^2+2^{2n+2}}{2^{2n+3}}.
\end{aligned}$$

Використовуючи формулу

$$a^2+b^2=\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{2},$$

далі одержуємо:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2^{2n+4}}\cdot\left(\left(\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}-2^{n+1}\right)^2+\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\left(\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}+2^{n+1}\right)^2\right)= \\
&= \left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}-2^{n+1}}{2^{n+2}}\right)^2+ \\
&\qquad +\left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}+2^{n+1}}{2^{n+2}}\right)^2=(y_n-1)^2+y_n^2,
\end{aligned}$$

де

$$y_n=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}+2^{n+1}}{2^{n+2}}, \quad n\geqslant 1.$$

Залишилося довести, що y_n для всіх натуральних n є цілим числом. Для цього розглянемо послідовність із загальним членом

$$z_n=\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n+1}, \quad n\geqslant 1.$$

Перепишемо її загальний член у вигляді:

$$\begin{aligned} z_n &= \left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1} = \\ &= \left(1+\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Таке представлення означає, що цю послідовність можна подати в рекурентному вигляді типу (4.2): $z_0 = 2$, $z_1 = 20$ і $z_{n+1} = 8z_n + 4z_{n-1}$, для всіх натуральних n. Далі помічаємо, що $z_n = 2^{n+1}s_n$, де s_n — непарне число. Доведемо це методом математичної індукції. *База індукції.* Оскільки $z_0 = 2$ і $z_1 = 20$, то $z_0 = 2 \cdot 1$ і $z_1 = 2^2 \cdot 5$. *Крок індукції.* Нехай $z_i = 2^{i+1}s_i$, де s_i — непарні числа, $i = n-1, n$. Тоді

$$z_{n+1} = 8z_n + 4z_{n-1} = 8 \cdot 2^{n+1}s_n + 4 \cdot 2^n s_{n-1} = 2^{n+2}\left(4s_n + s_{n-1}\right) = 2^{n+2}s_{n+1},$$

де $s_{n+1} = 4s_n + s_{n-1}$ — непарне число, бо за припущенням індукції s_n і s_{n-1} — непарні числа. Таким чином, за принципом математичної індукції, $z_n = 2^{n+1}s_n$, де s_n — непарне число, для всіх натуральних n. Звідси випливає, що

$$y_n = \frac{z_n + 2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{2^{n+1}s_n + 2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{s_n + 1}{2}$$

ціле число, бо s_n — непарне числа, що і завершує розв'язання. □

4.2. Послідовність Фібоначчі

Послідовністю Фібоначчі називають таку послідовність цілих чисел $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, яка рекурентно задається в такий спосіб: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ і $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geqslant 1$. Легко перевіряється, що першими членами цієї послідовності будуть наступні числа: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, і т.д. Усі члени, крім F_0, є натуральними числами і їх називають *числами Фібоначчі*.

Сподіваємося, що читачі вже самостійно можуть знайти формулу загального члена цієї послідовності:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \geqslant 0,$$

яку називають *формулою Біне*.

Одним із часто вживаних методів доведення різноманітних властивостей про числа Фібоначчі є метод математичної індукції.

Задача 4.16. *Доведіть, що будь-яке натуральне число можна подати у вигляді суми різних чисел Фібоначі.*

Розв'язання. *База індукції:* $1 = F_0 + F_1$, $2 = F_0 + F_1 + F_2$, $3 = F_0 + F_1 + F_3$, $4 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$. *Крок індукції.* Припустимо, що усі натуральні числа, які менші за n подаються у вигляді суми різних чисел Фібоначчі, і доведемо, що число n також можна подати у вигляді аналогічної суми. Нехай F_k — найбільше число Фібоначчі, яке менше за n. Тоді число $n - F_k$ менше за n і за припущенням його можна подати у вигляді суми різних чисел Фібоначчі, тобто $n - F_k = \sum_j F_{i_j}$. Оскільки за припущенням F_k — максимальне число Фібоначчі, яке менше за n, то $n - F_k < F_k$, бо $F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < 2F_k$ для $k \geqslant 2$. Це означає, що $F_k \neq F_{i_j}$, для всіх j. Тому $n = \sum\limits_j F_{i_j} + F_k$ — сума різних чисел Фібоначчі, що і треба було довести. □

Задача 4.17. *Доведіть, що числа Фібоначчі задовольняють рівність*

$$F_{2n+1} = (F_{n+1})^2 + (F_n)^2,$$

для всіх $n \geqslant 0$.

Розв'язання. Спочатку методом математичної індукції доведемо більш загальне співвідношення для чисел Фібоначчі:

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n, \text{ для всіх } m, n \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Зафіксуємо ціле невід'ємне число n і проведемо індукцію за числом m. *База індукції.* Якщо $m = 0$, то $F_{0+n+1} = F_{n+1} = F_1 F_{n+1} + F_0 F_n$ — правильна рівність, бо $F_0 = 0$ і $F_1 = 1$. Якщо $m = 1$, то $F_{1+n+1} = F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_2 F_{n+1} + F_1 F_n$ — правильна рівність, бо $F_1 = 1$ і $F_2 = 1$. *Крок індукції.* Припустимо, що рівність (4.4) виконується для $m = k - 1$ і для $m = k$, де k — натуральне число. Доведемо, використовуючи припущення, що рівність (4.4) виконується і для $m = k + 1$. За припущенням маємо: $F_{k+n} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ і $F_{k+n+1} = F_{k+1} F_{n+1} + F_k F_n$. Додавши почленно ці рівності, одержимо:

$$F_{k+n+1} + F_{k+n} = (F_{k+1} + F_k) F_{n+1} + (F_k + F_{k-1}) F_n,$$

тобто

$$F_{k+n+2} = F_{k+2} F_{n+1} + F_{k+1} F_n.$$

Остання рівність є рівністю (4.4) для чисел $m = k + 1$ і n, що і треба було довести. Отже, за принципом математичної індукції, рівність (4.4) виконується при всіх цілих невід'ємних m і n.

А тепер перейдемо до розв'язування задачі. Поклавши у рівності $m = n$, одержимо, що

$$F_{2n+1} = F_{n+1}F_{n+1} + F_n F_n = (F_{n+1})^2 + (F_n)^2,$$

для всіх $n \geqslant 0$, що і треба було довести. $\square$

Задача 4.18. *Доведіть, що числа Фібоначчі задовольняють рівність*

$$F_{3n} = (F_{n+1})^3 + (F_n)^3 - (F_{n-1})^3,$$

для всіх $n \geqslant 0$.

Розв'язання. Аналогічно до попередньої задачі, ми спочатку доведемо більш загальне співвідношення для чисел Фібоначчі, яке є узагальненням формули (4.4):

$$F_{m+n+p} = F_{m+1}F_{n+1}F_{p+1} + F_mF_nF_p - F_{m-1}F_{n-1}F_{p-1}, \tag{4.5}$$

для будь-яких $m, n, p \geqslant 1$. Для цього ми змушені збільшити послідовність Фібоначчі на член $F_{-1} = 1$ так, щоб її характеристичне рекурентне співвідношення $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ виконувалося для всіх $n \geqslant 0$, і щоб формула (4.5) виконувалася для будь-яких $m, n, p \geqslant 0$.

Будемо доводити формулу (4.5) методом математичної індукції. Для цього зафіксуємо цілі невід'ємні числа m і n, а індукцію будемо проводити по p.

База індукції. Якщо $p = 0$, то формула (4.5) запишеться так:

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_{n+1}F_1 + F_mF_nF_0 - F_{m-1}F_{n-1}F_{-1}.$$

Оскільки $F_{-1} = 1$, $F_0 = 0$ і $F_1 = 1$, то при $p = 0$ формула (4.5) набирає вигляду:

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}F_{n-1}.$$

Для доведення справедливості цієї формули, скористаємося формулою (4.4):

$$\begin{aligned}
F_{m+n} &= F_{(m-1)+n+1} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n = \\
&= (F_{m+1} - F_{m-1})\,F_{n+1} + F_{m-1}F_n = \\
&= F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-1}F_n = \\
&= F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}\,(F_{n+1} - F_n) = \\
&= F_{m+1}F_{n+1} - F_{m-1}F_{n-1},
\end{aligned}$$

що і треба було довести.

Якщо $p = 1$, то формула (4.5) запишеться так:

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1}F_2 + F_mF_nF_1 - F_{m-1}F_{n-1}F_0.$$

Враховуючи, що $F_2 = 1$, $F_1 = 1$ і $F_0 = 0$, то при $p = 1$ формула (4.5) набирає вигляду:

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n.$$

Ця формула є формулою (4.4), а тому є правильною.

Крок індукції. Нехай формула (4.5) є правильною для $p = k-1$ і $p = k$, де k — ціле невід'ємне число. Доведемо, використовуючи припущення, що формула (4.5) буде правильною і при $p = k+1$. Дійсно, за припущенням виконуються настурні рівності:

$$F_{m+n+k-1} = F_{m+1}F_{n+1}F_k + F_mF_nF_{k-1} - F_{m-1}F_{n-1}F_{k-2}$$

і

$$F_{m+n+k} = F_{m+1}F_{n+1}F_{k+1} + F_mF_nF_k - F_{m-1}F_{n-1}F_{k-1}.$$

Тоді,

$$\begin{aligned} F_{m+n+k+1} &= F_{m+n+k-1} + F_{m+n+k} = \\ &= F_{m+1}F_{n+1}\left(F_k + F_{k+1}\right) + F_mF_n\left(F_{k-1} + F_k\right) - F_{m-1}F_{n-1}\left(F_{k-2} + F_{k-1}\right) = \\ &= F_{m+1}F_{n+1}F_{k+2} + F_mF_nF_{k+1} - F_{m-1}F_{n-1}F_k, \end{aligned}$$

тобто

$$F_{m+n+k+1} = F_{m+1}F_{n+1}F_{k+2} + F_mF_nF_{k+1} - F_{m-1}F_{n-1}F_k.$$

Остання рівність є рівністю (4.5) для чисел m, n і $p = k+1$, що і треба було довести. Отже, за принципом індукції, рівність (4.5) виконується при всіх цілих невід'ємних m,n і p.

А тепер перейдемо до розв'язування задачі. Поклавши у рівності (4.5) $m = n$ і $p = n$, одержимо, що

$$F_{3n} = F_{n+n+n} = F_{n+1}F_{n+1}F_{n+1} + F_nF_nF_n - F_{n-1}F_{n-1}F_{n-1} = (F_{n+1})^3 + (F_n)^3 - (F_{n-1})^3,$$

для всіх $n \geqslant 0$, що і треба було довести. □

Задача 4.19. *Доведіть, що числа Фібоначчі задовольняють таку подільність: F_{mn} ділиться на F_n, для всіх $m, n \geqslant 1$.*

Розв'язання. Будемо доводити це твердження методом математичної індукції. Зафіксуємо ціле додатне число n, а індукцію будемо проводити по числу m. *База індукції.* Якщо $m = 1$, то $F_{mn} = F_n$ і ділиться на F_n. *Крок індукції.* Припустимо, що для $m = k$, де k — натуральне число, вказана подільність виконується. Доведемо, використовуючи припущення, що вказана подільність виконується і для $m = k+1$. Дійсно, за припущенням $F_{kn} \vdots F_n$. Тоді, використовуючи формулу (4.4), одержуємо:

$$F_{(k+1)n} = F_{kn+n} = F_{(kn-1)+n+1} = F_{kn}F_{n+1} + F_{kn-1}F_n,$$

ділиться на F_n, бо за припущенням $F_{kn} \vdots F_n$, тобто $F_{kn}F_{n+1} \vdots F_n$, а також і $F_{kn-1}F_n \vdots F_n$, що і треба було довести. Отже, за принципом індукції, вказана подільність виконується для будь-яких натуральних m і n. $\square$

А тепер розв'яжемо декілька задач, що пропонувалися на математичних олімпіадах.

Задача 4.20. *Дві послідовності* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *і* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *визначаються в такий спосіб:*

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$
$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n - b_n + b_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Доведіть, що $(a_n)^3 = b_{3n}$ *для всіх* $n \geqslant 1$.

(Відбори до Міжнародної математичної олімпіади, Румунія, 2003 р.)

Розв'язання. Обчислимо декілька перших членів обох послідовностей: $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4a_1 + a_0 = 8$, $a_3 = 4a_2 + a_1 = 34$, $a_4 = 4a_3 + a_2 = 144$ і т.д., $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = a_1 - b_1 + b_0 = 1$, $b_3 = a_2 - b_2 + b_1 = 8$, $b_4 = a_3 - b_3 + b_2 = 27$ і т.д. Помічаємо, що $a_0 = F_0$, $a_1 = F_3$, $a_2 = F_6$, $a_3 = F_9$, $a_4 = F_{12}$, де $\{F_n\}$ — послідовність Фібоначчі. Виникає *гіпотеза*: $a_n = F_{3n}$ і $b_n = (F_n)^3$, для усіх $n \geqslant 0$. Доведення цих двох рівностей здійснимо індуктивно.

Для першої рівності *база індукції* — очевидна. *Крок індукції.* Нехай $a_k = F_{3k}$ для всіх $k = 0, 1, \ldots, n$, тоді

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n + a_{n-1} = 4F_{3n} + F_{3n-3} = 4F_{3n} + (F_{3n-1} - F_{3n-2}) = \\ &= 4F_{3n} + F_{3n-1} - (F_{3n} - F_{3n-1}) = 3F_{3n} + 2(F_{3n+1} - F_{3n}) = \\ &= F_{3n} + 2F_{3n+1} = (F_{3n+2} - F_{3n+1}) + 2F_{3n+1} = F_{3n+2} + F_{3n+1} = F_{3n+3}, \end{aligned}$$

що і завершує доведення кроку.

Щоб довести другу рівність спочатку знайдемо рекурентну формулу для послідовності $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. З умови випливає, що $a_n = b_{n+1} + b_n - b_{n-1}$. Підставимо ці значення в рекурентну формулу для послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, одержимо:

$$b_{n+2} + b_{n+1} - b_n = 4(b_{n+1} + b_n - b_{n-1}) + (b_n + b_{n-1} - b_{n-2}).$$

Звідки знаходимо, що

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} + 6b_n - 3b_{n-1} - b_{n-2}.$$

Це означає, що послідовність $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ може бути заданою в такий спосіб:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 8, \quad b_{n+1} = 3b_n + 6b_{n-1} - 3b_{n-2} - b_{n-3}, \quad n \geqslant 3.$$

А тепер переходимо до доведення рівності $b_n = (F_n)^3$ послідовності $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Застосуємо метод математичної індукції. *База індукції* — очевидна. Крок індукції. Припустимо, що $b_j = \left(F_j\right)^3$, для всіх $j = 0, 1, \ldots, n$, тоді

$$b_{n+1} = 3(F_n)^3 + 6(F_{n-1})^3 - 3(F_{n-2})^3 - (F_{n-3})^3 =$$

$$= 3(F_{n-1} + F_{n-2})^3 + 6(F_{n-1})^3 - 3(F_{n-2})^3 - (F_{n-1} - F_{n-2})^3 =$$
$$= 8(F_{n-1})^3 + 12(F_{n-1})^2 F_{n-2} + 6F_{n-1}(F_{n-2})^2 + (F_{n-2})^3 =$$
$$= (2F_{n-1} + F_{n-2})^3 = (F_n + F_{n-1})^3 = (F_{n+1})^3,$$

що і завершує доведення кроку.

Таким чином, згідно з основним принципом математичної індукції, одержуємо, що $a_n = F_{3n}$ і $b_n = (F_n)^3$, для усіх $n \geqslant 0$, тобто $(a_n)^3 = b_{3n}$ для всіх $n \geqslant 1$. $\square$

Задача 4.21. *Послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ і $a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$, для всіх $n \geqslant 0$. Доведіть, що a_n ділиться на n націло при всіх $n \geqslant 1$.*

(Математичні змагання Румунії, 2001 р.)

Розв'язання. Спробуємо створити гіпотезу. Для цього, використовуючи умову, обчислюємо:

$$a_4 = 2a_3 + a_2 - 2a_1 - a_0 = 2 \cdot 6 + 2 - 2 \cdot 1 - 0 = 12,$$
$$a_5 = 2a_4 + a_3 - 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 12 + 6 - 2 \cdot 2 - 1 = 25,$$
$$a_6 = 2a_5 + a_4 - 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 25 + 12 - 2 \cdot 6 - 2 = 48.$$

Перевірка показує, що

$$\frac{a_1}{1} = 1, \frac{a_2}{2} = 1, \frac{a_3}{3} = 2, \frac{a_4}{4} = 3, \frac{a_5}{5} = 5, \frac{a_6}{6} = 8.$$

Помічаємо, що ці одержані значенні є першими членами *послідовності Фібоначчі*: $F_1 = F_2 = 1$ і $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всіх $n \geqslant 1$. Таким чином, у нас виникає *гіпотеза*: $a_n = n \cdot F_n$, для всіх $n \geqslant 1$. Доведення цієї рівності здійснимо індуктивно. *База індукції* для $n = 1, 2, 3, 4$ вже доведена. *Крок індукції* здійснимо за допомогою заданої в умові задачі рекурсивної формули. Якщо припустити, що для деякого натурального n виконуються рівності: $a_n = nF_n$, $a_{n+1} = (n+1)F_{n+1}$, $a_{n+2} = (n+2)F_{n+2}$ і $a_{n+3} = (n+3)F_{n+3}$, тоді одержуємо:

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n =$$
$$= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n =$$
$$= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - n(F_{n+2} - F_{n+1}) =$$
$$= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{n+2} - (n+2)(F_{n+3} - F_{n+2}) =$$
$$= (n+4)(F_{n+3} + F_{n+2}) = (n+4)F_{n+4},$$

що і завершує доведення кроку. Таким чином, згідно з основним принципом математичної індукції, одержуємо, що $a_n = nF_n$, для всіх $n \geqslant 1$. Оскільки члени послідовності Фібоначчі є натуральними числами, то a_n ділиться на n, при всіх $n \geqslant 1$, що і треба було довести. $\square$

Задача 4.22. *Доведіть, що числа Фібоначчі задовольняють таку подільність: $F_{mn-1} - (F_{n-1})^m$ ділиться на $(F_n)^2$, для всіх $m \geqslant 1$ і $n > 1$.*

(Математична олімпіада Німеччини, 2001 р.)

Розв'язання. Будемо доводити це твердження методом математичної індукції. Зафіксуємо ціле додатне число $n > 1$, а індукцію будемо проводити по числу m. *База індукції.* Якщо $m = 1$, то $F_{mn-1} - (F_{n-1})^m = F_{n-1} - F_{n-1} = 0$, а 0 ділиться на будь-яке натуральне число, зокрема і на $(F_n)^2$. *Крок індукції.* Припустимо, що для $m = k$, де k — натуральне число, вказана подільність виконується. Доведемо, використовуючи припущення, що вказана подільність виконується і для $m = k + 1$. Дійсно, за припущенням $\left(F_{kn-1} - (F_{n-1})^k\right) \vdots (F_n)^2$. Тоді, використовуючи (4.4), матимемо:

$$F_{(k+1)n-1} - (F_{n-1})^{k+1} = F_{kn+n-1} - F_{n-1}(F_{n-1})^k = F_{(kn-1)+(n-1)+1} - F_{n-1}(F_{n-1})^k =$$
$$= F_{kn}F_n + F_{kn-1}F_{n-1} - F_{n-1}(F_{n-1})^k = F_{kn}F_n + F_{n-1}\left(F_{kn-1} - (F_{n-1})^k\right),$$

ділиться на $(F_n)^2$, бо за припущенням $\left(F_{kn-1} - (F_{n-1})^k\right) \vdots (F_n)^2$ і $F_{kn}F_n \vdots (F_n)^2$ (адже за результатом задачі 4.19 виконується подільність: $F_{kn} \vdots F_n$), що і треба було довести. Отже, за принципом індукції, вказана подільність виконується для будь-яких натуральних m і $n > 1$. $\square$

Задача 4.23. *Доведіть, що числа Фібоначчі задовольняють таку подільність: $F_{mn} - (F_{n+1})^m + (F_{n-1})^m$ ділиться на $(F_n)^3$, для всіх $m \geqslant 1$ і $n > 1$.*

(Математична олімпіада Австрії, 2000 р.)

Розв'язання. Будемо доводити це твердження методом математичної індукції. Зафіксуємо ціле додатне число $n > 1$, а індукцію будемо проводити по числу m.

База індукції. Якщо $m = 1$, то

$$F_{mn} - (F_{n+1})^m + (F_{n-1})^m = F_n - F_{n+1} + F_{n-1} = 0,$$

а 0 ділиться на будь-яке натуральне число, зокрема і на $(F_n)^3$.

Крок індукції. Припустимо, що для $m = k$, де k — натуральне число, вказана подільність виконується. Доведемо, використовуючи припущення, що вказана подільність виконується і для $m = k + 1$. Дійсно, за припущенням

$$\left(F_{kn} - (F_{n+1})^k + (F_{n-1})^k\right) \vdots (F_n)^3.$$

Тоді, використовуючи (4.4), матимемо:

$$
\begin{aligned}
&F_{(k+1)n}-(F_{n+1})^{k+1}+(F_{n-1})^{k+1}= \\
&\qquad =F_{(kn-1)+n+1}-F_{n+1}(F_{n+1})^{k}+F_{n-1}(F_{n-1})^{k}= \\
&\qquad =F_{kn}F_{n+1}+F_{kn-1}F_{n}-F_{n+1}(F_{n+1})^{k}+F_{n-1}(F_{n-1})^{k}= \\
&=\left(F_{kn}-(F_{n+1})^{k}+(F_{n-1})^{k}\right)F_{n+1}+F_{kn-1}F_{n}-F_{n+1}(F_{n-1})^{k}+F_{n-1}(F_{n-1})^{k}= \\
&=\left(F_{kn}-(F_{n+1})^{k}+(F_{n-1})^{k}\right)F_{n+1}+F_{kn-1}F_{n}-(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n-1})^{k}= \\
&=\left(F_{kn}-(F_{n+1})^{k}+(F_{n-1})^{k}\right)F_{n+1}+F_{kn-1}F_{n}-F_{n}(F_{n-1})^{k}= \\
&\qquad =\left(F_{kn}-(F_{n+1})^{k}+(F_{n-1})^{k}\right)F_{n+1}+\left(F_{kn-1}-(F_{n-1})^{k}\right)F_{n},
\end{aligned}
$$

ділиться на $(F_n)^3$, бо за припущенням $\left(F_{kn}-(F_{n+1})^{k}+(F_{n-1})^{k}\right)\vdots(F_n)^3$ і $\left(\left(F_{kn-1}-(F_{n-1})^{k}\right)F_n\right)\vdots(F_n)^3$ (адже за результатом задачі 4.22, виконується подільність $\left(F_{kn-1}-(F_{n-1})^{k}\right)\vdots(F_n)^2$), що і треба було довести. Отже, за принципом індукції, вказана подільність виконується для будь-яких натуральних m і $n>1$. □

Задача 4.24. *Доведіть, що для чисел Фібоначчі виконується рівність*

$$\text{НСД}(F_m,F_n)=F_{\text{НСД}(m,n)},$$

для всіх $m,n\in\mathbb{N}$.

(Математична олімпіада Польщі, 1995 р.)

Розв'язання. Якщо $m=n$, то $\text{НСД}(F_n,F_n)=F_n=F_{\text{НСД}(n,n)}$, тобто при $m=n$ вказана рівність виконується. Нехай $m>n$, тоді виконується така рівність:

$$F_m=F_{(m-n)+n}=F_{m-n}F_{n+1}+F_{m-n-1}F_n.$$

Далі ми використовуватимемо відому властивість найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел a і b:

$$\text{НСД}(a,b)=\text{НСД}(a-b,b),$$

де $a\geqslant b$.

Лема 1. *Будь-які два послідовних числа Фібоначчі взаємно прості.*

Доведення. Маємо

$$\text{НСД}(F_{n+1},F_n)=\text{НСД}(F_{n+1}-F_n,F_n)=\text{НСД}(F_{n-1},F_n)=\text{НСД}(F_n,F_{n-1}),$$

тобто $\text{НСД}(F_{n+1},F_n)=\text{НСД}(F_n,F_{n-1})$. Застосовуючи цю рівність, одержуємо, що

$$\text{НСД}(F_{n+1},F_n)=\text{НСД}(F_n,F_{n-1})=\ldots=\text{НСД}(F_2,F_1)=1,$$

бо $F_2 = F_1 = 1$. Лему доведено.

Далі матимемо

$$\begin{aligned}\text{НСД}(F_m, F_n) &= \text{НСД}(F_{m-n}F_{n+1} + F_{m-n-1}F_n, F_n) = \\ &= \text{НСД}(F_{m-n}F_{n+1}, F_n) = \text{НСД}(F_{m-n}, F_n),\end{aligned}$$

бо за лемою числа F_{n+1} і F_n взаємно прості.

Таким чином, ми довели, що $\text{НСД}(F_m, F_n) = \text{НСД}(F_{m-n}, F_n)$. Маючи таку властивість чисел Фібоначчі, ми можемо записувати, що коли $m = nk + r$, де k — ціле невід'ємне число, а $0 \leqslant r < n$, то $\text{НСД}(F_m, F_n) = \text{НСД}(F_n, F_r)$.

Остання властивість чисел Фібоначчі дозволяє застосувати *алгоритм Евкліда*:

$$\text{НСД}(F_m, F_n) = \text{НСД}(F_n, F_r) = \ldots = \text{НСД}\big(F_{(m,n)}, 0\big) = F_{\text{НСД}(m,n)},$$

що і треба було довести. □

Згаданий алгоритм Евкліда можна описати так. Якщо є два натуральних числа a і b, причому $a > b$, то спочатку ділимо a на b і одержуємо остачу r_1 ($0 \leqslant r_1 < b$). Потім ділимо число b на число r_1 і знаходимо остачу r_2 ($0 \leqslant r_2 < r_1$). Далі ділимо число r_1 на число r_2, при цьому одержується остача r_3 ($0 \leqslant r_3 < r_2$), і т.д., поки якась остача r_{k-1} не розділиться на остачу r_k націло, тобто $r_{k+1} = 0$. Остання ненульова остача r_k і є $\text{НСД}(a, b)$. Дійсно,

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{k-2}, r_{k-1}) = (r_{k-1}, r_k) = (r_k, 0) = r_k.$$

Задача 4.25. *Доведіть, що для чисел Фібоначчі виконується рівність*

$$F_{2n} = \frac{(F_{2n+2})^3 + (F_{2n-2})^3}{9} - 2(F_{2n})^3,$$

для всіх натуральних $n \geqslant 2$.

(Математична олімпіада Південної Кореї, 2001 р.)

Розв'язання. Використовуючи рекурентне співвідношення для чисел Фібоначчі, знаходимо:

$$\begin{aligned}F_{2n+2} - 3F_{2n} &= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 2F_{2n} = F_{2n+1} - 2F_{2n} = \\ &= (F_{2n+1} - F_{2n}) - F_{2n} = F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-2},\end{aligned}$$

тобто

$$3F_{2n} - F_{2n+2} - F_{2n-2} = 0, \tag{4.6}$$

для всіх натуральних $n \geqslant 2$.

Далі, позначивши $a = 3F_{2n}$, $b = -F_{2n+2}$, $c = -F_{2n-2}$, і скориставшись відомою алгебраїчною тотожністю (див. (1.5))

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\big(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\big),$$

одержимо, що

$$27(F_{2n})^3-(F_{2n+2})^3-(F_{2n-2})^3-9F_{2n+2}F_{2n}F_{2n-2}=0. \tag{4.7}$$

Використовуючи попереднє рекурентне співвідношення, знаходимо:

$$\begin{aligned}F_{2n+2}F_{2n-2}-(F_{2n})^2&=(3F_{2n}-F_{2n-2})\,F_{2n-2}-(F_{2n})^2=\\&=F_{2n}\,(3F_{2n-2}-F_{2n})-(F_{2n-2})^2=F_{2n}F_{2n-4}-(F_{2n-2})^2=\\&=F_6F_2-\left(F_4\right)^2=8\cdot 1-3^2=-1,\end{aligned}$$

тобто $F_{2n+2}F_{2n-2}-(F_{2n})^2=-1$ для всіх $n\geqslant 2$. Це означає, що

$$9F_{2n+2}F_{2n}F_{2n-2}-9(F_{2n})^3=9F_{2n}\left(F_{2n+2}F_{2n-2}-(F_{2n})^2\right)=-9F_{2n},$$

тобто $9F_{2n+2}F_{2n}F_{2n-2}-9(F_{2n})^3=-9F_{2n}$ для всіх $n\geqslant 2$. Таким чином, із (4.7) та останнього співвідношення одержуємо:

$$18(F_{2n})^3-(F_{2n+2})^3-(F_{2n-2})^3+9F_{2n}=0.$$

Звідки

$$F_{2n}=\frac{(F_{2n+2})^3+(F_{2n-2})^3}{9}-2(F_{2n})^3,$$

що і треба було довести. □

Задача 4.26. *Обчисліть добуток*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{(F_n)^2}\right),$$

де F_n — n-й член послідовності Фібоначчі.

(Математимна олімпіада США, 2003 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо, що

$$F_{n+1}F_{n-1}-(F_n)^2=(-1)^n,$$

для всіх $n\geqslant 1$. Справді,

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n-1}-(F_n)^2&=(F_n+F_{n-1})\,F_{n-1}-(F_n)^2=F_n\,(F_{n-1}-F_n)+(F_{n-1})^2=\\&=-\left(F_nF_{n-2}-(F_{n-1})^2\right),\end{aligned}$$

тобто

$$F_{n+1}F_{n-1}-(F_n)^2=-\left(F_nF_{n-2}-(F_{n-1})^2\right),$$

для всіх $n\geqslant 1$. Таким чином,

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n-1}-(F_n)^2&=-\left(F_nF_{n-2}-(F_{n-1})^2\right)=(-1)^2\left(F_{n-1}F_{n-3}-(F_{n-2})^2\right)=\\&=(-1)^3\left(F_{n-2}F_{n-4}-(F_{n-3})^2\right)=\ldots=(-1)^n\left(F_1F_{-1}-(F_0)^2\right)=(-1)^n.\end{aligned}$$

Отже, шуканий добуток обчислюватиметься так:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{(F_n)^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{(F_n)^2+(-1)^n}{(F_n)^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\cdot\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{F_0F_{N+1}}{F_1F_N}=\lim_{N\to\infty}\frac{F_{N+1}}{F_N}.$$

Використовуючи формулу Біне

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

для $n\geqslant 0$, обчислюємо границю:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{F_{N+1}}{F_N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{N+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{N}}=$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{N+1}}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{N}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

бо $0<\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$ і $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{N+1}\to 0$ та $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{N+1}\to 0$, при $N\to\infty$.

Таким чином, шуканий добуток дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

4.3. Нерівності для послідовностей

З цьому пункті зібрана певна добірка задач, в яких потрібно виконувати оцінки певних виразів, які пов'язані із послідовностями.

Задача 4.27. *Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{1997}$ — дійсні числа, які задовольняють наступним двом умовам:*

а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}$, для $i=1,2,\ldots,1997$;

б) $x_1+x_2+\ldots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

Визначити найбільш можливе значення виразу $x_1^{12}+x_2^{12}+\ldots+x_{1997}^{12}$.

(Математична олімпіада Китаю, 1997 р.)

Розв'язання. Застосуємо *метод Штурма* (див. параграф 2.5). Спочатку доведемо таке твердження.

Лема. Якщо $0<a\leqslant b$ і $x>0$, то має місце наступна нерівність:

$$(b+x)^{12}+(a-x)^{12}>b^{12}+a^{12}.$$

Доведення. Застосувавши формулу бінома Ньютона, одержуємо:

$$(b+x)^{12}+(a-x)^{12}-b^{12}-a^{12}=C_{12}^{1}x\left(b^{11}-a^{11}\right)+C_{12}^{2}x^{2}\left(b^{10}+a^{10}\right)+$$
$$+C_{12}^{3}x^{3}\left(b^{9}-a^{9}\right)+\ldots+C_{12}^{10}x^{10}\left(b^{2}+a^{2}\right)+C_{12}^{11}x^{11}(b-a)+2x^{2}>0.$$

□

Суть цієї леми ось у чому. Якщо менше із двох додатних чисел зменшити, а більше збільшити так, щоб їх сума залишалася тією ж самою, то сума дванадцятих степенів цих чисел збільшиться.

А тепер перейдемо до розв'язку запропонованої задачі. Позначимо $y_i = \sqrt{3}x_i$. Тоді маємо:

1) $-1 \leqslant y_i \leqslant 3$, для $i = 1, 2, \ldots, 1997$;

2) $y_1 + y_2 + \ldots + y_{1997} = -954$.

Нам треба знайти найбільше значення виразу

$$x_1^{12}+x_2^{12}+\ldots+x_{1997}^{12}=\frac{y_1^{12}+y_2^{12}+\ldots+y_{1997}^{12}}{3^6}.$$

Якщо які-небудь два із чисел y_1, y_2, $\ldots$, y_{1997} належать інтервалу $(-1;3)$, то згідно з лемою ці два числа можна замінити числами, одне із яких дорівнює -1 або 3, і виконуватимуться умови 1) і 2), причому сума $y_1^{12}+\ldots+y_{1997}^{12}$ зросте. Далі, до нового набору чисел, знову застосуємо таку заміну двох чисел, до тих пір, поки це буде можливо здійснити. При цьому, значення суми $y_1^{12}+\ldots+y_{1997}^{12}$ кожен раз буде зростати. Цей процес скінчений, бо кожного разу кількість чисел y_i, які належать інтервалу $(-1;\ 3)$, зменшуватиметься. Звідси випливає, що сума $y_1^{12}+\ldots+y_{1997}^{12}$ буде найбільшою, коли числа $y_1, \ldots, y_{1997}$ замінити або на числа $-1, \ldots, -1, 3, \ldots, 3$, або на числа $-1, \ldots, -1, 3, \ldots, 3, a$, де $a \in (-1;\ 3)$.

Враховуючи умову 2) одержуємо, що можливий лише другий випадок, причому $k = \dfrac{a+2}{4} + 1735$, де k — кількість -1. Оскільки $\dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$ і $a \in (-1;\ 3)$, то $a = 2$.

Таким чином, найбільше значення виразу $x_1^{12}+x_2^{12}+\ldots+x_{1997}^{12}$ дорівнює

$$\frac{1736+260\cdot 3^{12}+2^{12}}{3^6}=189\,548.$$

□

Задача 4.28. *Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ додатних дійсних чисел задовольняє умову*

$$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Доведіть, що

$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m}-1\right)a_m$$

для всіх $n \geqslant m$.

(Математична олімпіада Китаю, 1997 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо методом математичної індукції, що $a_n \leqslant \leqslant na_1$ для всіх натуральних n.

База індукції очевидна. *Крок індукції.* Нехай $a_i \leqslant ia_1$, для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді

$$a_{n+1} \leqslant a_n + a_1 \leqslant na_1 + a_1 = (n+1)\,a_1,$$

тобто $a_{n+1} \leqslant (n+1)\,a_1$. Таким чином, $a_n \leqslant na_1$ для всіх натуральних n.

Нехай m — задане натуральне число. Доведемо індукцією по n, що $a_{nm} \leqslant \leqslant na_m$ для всіх натуральних n. *База індукції.* При $n = 1$ маємо: $a_{1\cdot m} = a_m \leqslant 1 \cdot a_m$. *Крок індукції.* Нехай $a_{nm} \leqslant na_m$ для деякого натурального n. Тоді

$$a_{(n+1)m} = a_{nm+m} \leqslant a_{nm} + a_m \leqslant na_m + a_m = (n+1)\,a_m,$$

тобто $a_{(n+1)m} \leqslant (n+1)\,a_m$, що і завершує доведення кроку. Отже, $a_{nm} \leqslant na_m$ для всіх натуральних n.

А тепер перейдемо до розв'язування запропонованої задачі. Нехай m і n задані натуральні числа, причому $n \geqslant m$. Виконаємо ділення з остачею числа n на число m, одержимо: $n = km + r$, де $r = 1, 2, \ldots, m$. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{km+r} \leqslant a_{km} + a_r \leqslant ka_m + a_r = \\ &= \frac{n-r}{m}a_m + a_r = \frac{n-m}{m}a_m + \frac{m-r}{m}a_m + a_r \leqslant \\ &\leqslant \frac{n-m}{m}a_m + \frac{m-r}{m}\cdot ma_1 + ra_1 = \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m + ma_1, \end{aligned}$$

що і завершує розв'язання. □

Задача 4.29. *Нехай $n \geqslant 3$ — задане натуральне число. Припустимо, що послідовність $\{a_m\}_{m=1}^{n}$ додатних дійсних чисел задовольняє співвідношення $a_{i-1} + a_{i+1} = k_i a_i$, де k_1, k_2, …, k_n — деякі натуральні числа, $i = 1, 2, \ldots, n$ (тут $a_0 = a_n$ та $a_{n+1} = a_1$). Доведіть, що*

$$2n \leqslant k_1 + k_2 + \ldots + k_n < 3n.$$

(Математична олімпіада Тайваню, 1997 р.)

Розв'язання. Ліва нерівність випливає з того, що

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n,$$

бо за нерівністю Коші

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i} \geqslant 2\sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1}}\cdot\frac{a_{i+1}}{a_i}} = 2.$$

Праву нерівність будемо доводити індукцією по n. *База індукції.* При $n = 3$ маємо послідовність додатних чисел a_1, a_2, a_3, для яких виконуються рівності $a_3 + a_2 = k_1 a_1$, $a_1 + a_3 = k_2 a_2$ і $a_2 + a_1 = k_3 a_3$, де k_1, k_2, k_3 — деякі натуральні числа. Із першої рівності знаходимо $a_3 = k_1 a_1 - a_2$ і, підставивши це значення в другу і третю рівності, одержимо: $a_1 + k_1 a_1 - a_2 = k_2 a_2$ і $a_2 + a_1 = k_3 (k_1 a_1 - a_2)$. Ці дві рівності можна переписати так: $(1 + k_1) a_1 = (1 + k_2) a_2$ і $(1 + k_3) a_2 = (k_1 k_3 - 1) a_1$. Оскільки a_1, a_2, a_3 — додатні числа, то $k_1 k_3 - 1 > 0$. Тому, перемноживши останні дві рівності, після скороченні на $a_1 a_2 > 0$, одержимо:

$$(1 + k_1)(1 + k_3) = (1 + k_2)(k_1 k_3 - 1),$$

тобто

$$k_1 + k_2 + k_3 = k_1 k_2 k_3 - 2.$$

Доведемо, що $k_1 + k_2 + k_3 < 3 \cdot 3 = 9$. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$. Якщо припустити, що $k_1 \geqslant 3$, тоді матимемо:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= k_1 k_2 k_3 - 2 \geqslant 3 k_2 k_3 - 2 = \\ &= 2(k_2 k_3 - 1) + k_2 k_3 > k_2 k_3 \geqslant \\ &\geqslant 3 k_3 \geqslant k_1 + k_2 + k_3, \end{aligned}$$

тобто одержали суперечність. Тому, $k_1 \leqslant 2$. Розглянемо два випадки.

Нехай $k_1 = 1$, тоді $1 + k_2 + k_3 = k_2 k_3 - 2$, тобто $(k_2 - 1)(k_3 - 1) = 4$. Звідки випливає, що $k_2 - 1 = 1$ і $k_3 - 1 = 4$, або $k_2 - 1 = 2$ і $k_3 - 1 = 2$. Перший результат дає $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$ і $k_1 + k_2 + k_3 = 8 < 9$. Другий результат дає $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$ і $k_1 + k_2 + k_3 = 7 < 9$.

Нехай $k_1 = 2$, тоді $2 + k_2 + k_3 = 2 k_2 k_3 - 2$, тобто $(2k_2 - 1)(2k_3 - 1) = 9$. Оскільки $2 \leqslant k_2 \leqslant k_3$, то $3 \leqslant 2k_2 - 1 \leqslant 2k_3 - 1$, то із останньої рівності випливає, що $2k_2 - 1 = 3$ і $2k_3 - 1 = 3$. Цей результат дає $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$ і $k_1 + k_2 + k_3 = 6 < 9$. Базу доведено.

Крок індукції. Нехай $n > 3$. Припустимо, що для будь-яких дійсних додатних чисел b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}$, які задовольняють рівності $b_{i-1} + b_{i+1} = l_i b_i$, де l_1, $l_2, \ldots, l_{n-1}$ — натуральні, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, (тут $b_0 = b_{n-1}$, а $b_n = b_1$), виконується нерівність $l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1} < 3(n-1)$. Розглянемо тепер n дійсних додатних чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, які задовольняють рівності $a_n + a_2 = k_1 a_1$, $a_1 + a_3 = k_2 a_2$, $\ldots$, $a_{n-2} + a_n = k_{n-1} a_{n-1}$ і $a_{n-1} + a_1 = k_n a_n$, де k_1, k_2, $\ldots$, k_n — натуральні числа. Якщо усі числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n рівні між собою, то $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$ і $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 2n < 3n$. Якщо це не так, то серед чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n існує таке число a_i, що $a_i \geqslant a_{i-1}$ і $a_i \geqslant a_{i+1}$, причому одна із цих нерівностей — строга. Тоді $k_i a_i = a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$. Звідки слідує, що $k_i = 1$, тобто $a_{i-1} + a_{i+1} = a_i$.

Враховуючи це, з рівностей $a_{i-2} + a_i = k_{i-1}a_{i-1}$ і $a_i + a_{i+2} = k_{i+1}a_{i+1}$ одержуємо, що $a_{i-2} + a_{i+1} = (k_{i-1} - 1)\,a_{i-1}$ і $a_{i-1} + a_{i+2} = (k_{i+1} - 1)\,a_{i+1}$. Якщо $k_{i-1} = 1$, то $a_i < a_{i-2} + a_i = a_{i-1}$, що суперечить припущенню. Отже, $k_{i-1} > 1$. Аналогічно доводиться, що і $k_{i+1} > 1$. Оскільки $a_{i-2} + a_{i+1} = (k_{i-1} - 1)\,a_{i-1}$ і $a_{i-1} + a_{i+2} = (k_{i+1} - 1)\,a_{i+1}$, причому числа $k_{i-1} - 1$ і $k_{i+1} - 1$ є натуральними, то набір із $n-1$ додатних чисел $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ співпадає з набором $b_1, \dots, b_{n-1}$, для якого $l_1 = k_1$, …, $l_{i-2} = k_{i-2}$, $l_{i-1} = k_{i-1} - 1$, $l_i = k_{i+1} - 1$, $l_{i+1} = k_{i+2}, \dots, l_{n-1} = k_n$. Оскільки за припущенням $l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1} < 3\,(n-1)$, тоді матимемо:

$$k_1 + \ldots + k_{i+2} + (k_{i-1} - 1) + (k_{i+1} - 1) + k_{i+2} + \ldots + k_n < 3\,(n-1)\,,$$

тобто

$$k_1 + \ldots + k_{i-1} + k_{i+1} + \ldots + k_n < 3n - 1.$$

Враховуючи, що $k_i = 1$, одержуємо, що

$$k_1 + \ldots + k_n < 3n,$$

що і завершує доведення кроку. $\square$

Задача 4.30. *Дві послідовності* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *та* $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ *дійсних чисел визначаються в такий спосіб:*

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}},$$

для всіх $n \geqslant 1$. *Доведіть, що* $2 < x_n y_n < 3$ *для всіх* $n > 1$.

(Математична олімпіада Білорусі, 1999 р.)

Розв'язання. *1-й спосіб.* Нехай $z_n = \dfrac{1}{y_n}$ і тоді рекурентна формула для y_n перепишеться так:

$$z_{n+1} = z_n + \sqrt{1 + z_n^2}.$$

Оскільки $z_2 = \sqrt{3} = x_1$, то зв'язок між x_i та z_i виражається наступною рекурентною формулою: $z_n = x_{n-1}$, для всіх $n > 1$. Тому

$$x_n y_n = \frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Оскільки послідовність $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ монотонно зростає (бо $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2} > x_n$), то для всіх $n > 1$ маємо: $3x_{n-1}^2 \geqslant 3x_1^2 > 1$. Тоді

$$4x_{n-1}^2 > 1 + x_{n-1}^2,$$

$$2x_{n-1} > \sqrt{1 + x_{n-1}^2},$$

$$3x_{n-1} > x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2} = x_n,$$

звідки $\frac{x_n}{x_{n-1}} < 3$. Далі, враховуючи, що

$$\sqrt{1+x_{n-1}^2} > x_{n-1},$$

знаходимо

$$x_n = x_{n-1} + \sqrt{1+x_{n-1}^2} > 2x_{n-1},$$

тобто $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 2$, що і треба було довести.

2-й спосіб. Позначимо $x_n = \operatorname{tg}\alpha_n$, де $0° < \alpha_n < 90°$, тоді

$$x_{n+1} = \operatorname{tg}\alpha_n + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_n} = \operatorname{tg}\alpha_n + \frac{1}{\cos\alpha_n} =$$

$$= \frac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n} = \operatorname{tg}\left(\frac{90°+\alpha_n}{2}\right) = \operatorname{tg}\alpha_{n+1}.$$

Оскільки $\alpha_1 = 60°$ і $\alpha_{n+1} = \dfrac{90°+\alpha_n}{2}$, то $\alpha_2 = 75°$, $\alpha_3 = 82,5°, \ldots$. Далі, індукцією по n, доводимо, що $\alpha_n = 90° - \dfrac{30°}{2^{n-1}}$. Таким чином,

$$x_n = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{30°}{2^{n-1}}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{30°}{2^{n-1}}\right) = \operatorname{ctg}\varphi_n,$$

де $\varphi_n = \dfrac{30°}{2^{n-1}}$. Аналогічно знаходимо, що

$$y_n = \operatorname{tg}(2\varphi_n) = \frac{2\operatorname{tg}\varphi_n}{1-tg^2\varphi_n}.$$

Звідси випливає, що

$$x_n y_n = \frac{2}{1-tg^2\varphi_n}.$$

Оскільки $0° < \varphi_n < 45°$, то $0 < \operatorname{tg}^2\varphi_n < 1$ і тому $x_n y_n > 2$. Для $n > 1$ маємо, що $0° < \varphi_n < 30°$, тому $0 < \operatorname{tg}^2\varphi_n < \frac{1}{3}$, а $x_n y_n < 3$, що і треба було довести. □

Задача 4.31. *Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geqslant 3$ існує n натуральних цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, які утворюють арифметичну прогресію, і n натуральних чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, які утворюють геометричну прогресію, для яких виконуються нерівності*

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n.$$

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Румунія, 1999 р.)

Розв'язання. Нехай m — натуральне число. Розглянемо наступну геометричну прогресію:

$$B_k = \left(1+\frac{1}{m}\right)^k = 1 + \frac{k}{m} + \frac{k(k-1)}{2!m^2} + \ldots + \frac{k!}{k!m^k},$$

де $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Звідси випливає, що $B_k > 1 + \frac{k}{m}$, для $k \geqslant 2$. Для всіх $k \leqslant n$ можна здійснити такі оцінки:

$$B_k \leqslant 1 + \frac{k}{m} + \frac{n(n-1)}{2!m^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!m^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!m^k} =$$
$$= 1 + \frac{k}{m} + \left(\frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{m} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{m^2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{m^{k-1}}\right) \cdot \frac{1}{m}.$$

Якщо взяти $m > n^2$, то одержимо:

$$B_k < 1 + \frac{k}{m} + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) \cdot \frac{1}{m} < 1 + \frac{k+1}{m}.$$

Для доведення останньої нерівності, здійснимо наступні оцінки. Для $m > n^2$ матимемо:

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} < 1,$$

бо $k \geqslant 2$.

Тепер розглянемо наступну арифметичну прогресію:

$$A_k = 1 + \frac{k+1}{m},$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$. Із попередніх оцінок випливає, що

$$B_1 < A_1 < B_2 < A_2 < \ldots < B_n < A_n.$$

Беручи до уваги формули для B_k і A_k, ми помічаємо, що члени цих прогресій не є натуральними числами. Але помноживши їх на m^n, ми одержимо прогресії $a_k = m^n A_k$ і $b_k = m^n B_k$, які задовольняють вже усі умови задачі, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 4.32. *Нехай a — дійсне додатне число. Послідовність $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ дійсних чисел задовольняє наступні умови: $x_1 = a$ і*

$$x_{n+1} \geqslant (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k$$

для всіх $n \geqslant 1$. Доведіть, що існує таке натуральне число m, що $x_m > 1999!$.

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Румунія, 1999 р.)

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що для всіх натуральних n виконується нерівність:

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k.$$

База індукції. При $n = 1$, з умови задачі випливає, що

$$x_2 \geqslant (1+2)\,x_1 = 3x_1 > x_1.$$

Крок індукції. Припустимо, що

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k$$

і доведемо аналогічну нерівність для x_{n+2}:

$$x_{n+2} \geqslant (n+3)\,x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} kx_k = (n+1)\,x_{n+1} + 2x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} kx_k >$$
$$> (n+1)\,x_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} kx_k - \sum_{k=1}^{n} kx_k = (n+1)\,x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n+1} kx_k.$$

Таким чином, за основним принципом математичної індукції, для всіх $n \geqslant 1$ виконується нерівність

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k.$$

Далі, із цієї нерівності, одержуємо:

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k > nx_n,$$

тобто $x_{n+1} > nx_n$, для всіх $n \geqslant 1$. Із цієї нерівності, індуктивно, одержуємо:

$$x_{n+1} > nx_n > n(n-1)\,x_{n-1} > n(n-1)(n-2)\,x_{n-2} > \ldots > n!a.$$

Очевидно, що для достатньо великого $n = m-1$ виконуватиметься нерівність $(m-1)!a > 1999!$. Таке значення m і буде шуканим. □

Задача 4.33. *Послідовність $\{a_m\}_{m=1}^{100}$ дійсних чисел задовольняє наступні умови:*

1) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{100} \geqslant 0$,

2) $a_1 + a_2 \leqslant 100$,

3) $a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} \leqslant 100$.

Знайдіть найбільш можливе значення виразу $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2$. Знайдіть усі такі послідовності, для яких це максимальне значення досягається.

(Математична олімпіада Канади, 2000 р.)

Розв'язання. Оскільки для $i = 3, 4, \ldots, 100$ виконуються нерівності $0 \leqslant a_i \leqslant a_2$, то для $i = 3, 4, \ldots, 100$ виконуються й такі нерівності $a_i\,(a_i - a_2) \leqslant 0$, причому знак рівності досягається лише тоді, коли $a_i \in \{0, a_2\}$. Додавши ці 98 нерівностей, одержимо:

$$\sum_{i=3}^{100} a_i^2 \leqslant a_2 \sum_{i=3}^{100} a_i.$$

Враховуючи умову 3, одержуємо, що $\sum\limits_{i=3}^{100} a_i^2 \leqslant 100a_2$, причому знак рівності досягається лише тоді, коли $\sum\limits_{i=3}^{100} a_i = 100$ або $a_2 = 0$.

Якщо $a_2 = 0$, то $\sum\limits_{i=3}^{100} a_i^2 = 0$, а $\sum\limits_{i=1}^{100} a_i^2 = a_1^2 \leqslant 100^2 = 10000$. Максимальне значення 10 000 досягається лише для послідовності $a_1 = 100, a_2 = a_3 = \ldots = a_{100} = 0$.

Якщо $a_2 > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{100} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \sum_{i=3}^{100} a_i^2 \leqslant a_1^2 + a_2^2 + 100a_2.$$

Використовуючи умови 1 і 2, знаходимо, що $0 \leqslant a_1 \leqslant 100{-}a_2$. Звідки, після піднесення обох частин цієї нерівності до квадрату, одержимо: $a_1^2 \leqslant (100 - a_2)^2$, причому рівність в цій нерівності досягається при умові, що $a_1 = 100{-}a_2$. Крім того, $0 < a_2 \leqslant 100 - a_1 \leqslant 100 - a_2$, тобто $0 < a_2 \leqslant 50$. Тому $a_2\,(a_2 - 50) \leqslant 0$, причому рівність досягається лише тоді, коли $a_2 = 50$. Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{100} a_i^2 \leqslant a_1^2 + a_2^2 + 100a_2 \leqslant (100 - a_2)^2 + a_2^2 + 100a_2 = 10\,000 + 2a_2\,(a_2 - 50) \leqslant$$
$$\leqslant 10\,000.$$

Значення 10 000 досягається лише тоді, коли $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 50$, $a_5 = = \ldots = a_{100} = 0$, бо, як відомо $a_i \in \{0, a_2\}$.

Таким чином, в обох випадках $\max\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2\right) = 10\,000$. Досягається це значення для двох послідовностей:

$$100, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0 \text{ і } 50, 50, 50, 50, 0, 0, \ldots, 0, 0.$$

□

Задача 4.34. *Знайдіть найбільше значення x_0, для якого існує послідовність дійсних додатних чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$, яка задовольняє наступні умови:*

1) $x_0 = x_{1995}$;

2) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ *для всіх* $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

(Міжнародна математична олімпіада, 1995 р.)

Розв'язання. Умова 2 означає, що x_i — один із двох коренів рівняння

$$x^2 - \left(\frac{x_{i-1}}{2} + \frac{1}{x_{i-1}}\right)x + \frac{1}{2} = 0,$$

тобто $x_i = \frac{x_{i-1}}{2}$ або $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$. Власне, це і є основна здогадка. Спробуємо викласти ту, що залишилася, (технічну) частину розв'язання наочно.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \boxed{2x_0} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{x_0} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\frac{x_0}{2}} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \ldots \\
\ldots & \boxed{\frac{1}{2x_0}} \arrow[l] & \boxed{\frac{1}{x_0}} \arrow[l] & \boxed{\frac{2}{x_0}} \arrow[l] & \boxed{} \arrow[l] & \boxed{} \arrow[l] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Шлях по табличці із двох рядів (див. мал.), який складається із 1995 кроків, згідно з умовою 1), повинен, розпочинаючись з числа x_0, закінчитися на рівному йому числі. Так як в кожному ряду числа різні, а внаслідок непарності числа 1995 шлях не може бути замкненим, то $x_0 = x_{1995}$ повинно зустрітися в нижньому ряду. Тому $x_0 = \frac{2^k}{x_0}$, тобто $x_0 = 2^{\frac{k}{2}}$ для деякого цілого числа k. Зрозуміло, що x_0 досягне найбільшого значення, якщо найбільшим буде число k. Це буде досягатися для шляху, який складається із 1994 кроків по верхньому ряду і єдиного кроку вниз. При цьому

$$x_{1995} = 2^{-\left(\frac{k}{2} - 1994\right)} = 2^{\frac{k}{2}} = x_0.$$

Звідси знаходимо: $k = 1994$ і $x_0 = 2^{997}$. □

Задача 4.35. *У послідовності чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *кожне натуральне число зустрічається хоча б один раз, і для будь-яких різних n і m виконується нерівність*

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998.$$

Доведіть, що тоді $|a_n - n| < 2\,000\,000$ *для всіх натуральних n.*

(Математична олімпіада Росії, 1998 р.)

Розв'язання. Із нерівності

$$\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} > \frac{1}{1998}$$

випливає, що всі члени нашої послідовності попарно різні.

Лема 2. *Якщо* $i > n$, $a_i < a_n$, *то* $i - n < 2\,000\,000$.

Доведення. Нехай $i > n$ і $a_i < a_n$. Числовий інтервал $[1, a_n]$ містить лише скінчене число членів послідовності, а це означає, що всі a_k з досить великим k

будуть більші за a_n. При зростанні індекса від i до безмежності знайдеться таке j, що $a_j < a_n < a_{j+1}$. Відстань між a_j і a_{j+1}, враховуючи нерівність $\frac{|a_n-a_m|}{|n-m|} <$ < 1998, менша за 1998, а тому або $a_n - a_j < 998$, або $a_{j+1} - a_n < 998$. В першому із цих випадків, з умови $\frac{j-n}{1998} < a_n - a_j < 998$, випливає, що $i \leqslant j < n + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$, в другому, аналогічно, що $i \leqslant j < n - 1 + 1998 \cdot$ $\cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$. Лему доведено. □

За умовою в послідовності зустрічаються всі натуральні числа, тому a_n дорівнює кількості членів послідовності, які лежать в інтервалі $[1, a_n]$. Член послідовності, який лежить в $[1,\ a_n]$, має індекс не більший n або більший n. Кількість перших не більша n, а кількість других, за доведеним, менша $2 \cdot 10^6$. Тому $a_n < n + 2 \cdot 10^6$. З іншого боку, також за доведеним, якщо $i < n - 2 \cdot 10^6$, то $a_i < a_n$. Це означає, що $[1, a_n]$ містить більше $n - 2 \cdot 10^6$ членів послідовності. Отже, $n - 2 \cdot 10^5 < a_n < n + 2 \cdot 10^6$, тобто $|a_n - n| < 2 \cdot 10^6$. □

Вправи для самостійного розв'язування

Вправа 1. *Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб:*

$$a_0 = 1, a_1 = 2 \ \text{і} \ a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Доведіть, що відношення $\dfrac{a_{6n}}{a_{2n}}$ не є кубом раціонального числа.

(Математична олімпіада Австрії, 1998 р.)

Вправа 2. *Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб: $a_0 = 4$, $a_1 = 22$ і $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$. Доведіть, що кожний її член a_n можна записати у вигляді*

$$a_n = \frac{y_n^2 + 7}{y_n - x_n},$$

де $x_n, y_n \in \mathbb{N}$.

(MOSP, 2001)

Вправа 3. *Нехай c — задане натуральне число. Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб: $a_1 = 1$, $a_2 = c$ і $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2, n \geqslant 2$. Доведіть, що для кожного натурального k знайдеться таке натуральне r, що $a_k a_{k+1} = a_r$.*

(IMO Shortlist, 1984 р.)

Вправа 4. *Нехай a і b — цілі числа. Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається так:*

$$a_0 = a, a_1 = b, a_2 = 2b - a + 2 \ \text{і} \ a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n, \quad n \geqslant 0.$$

Знайдіть такі a і b, що a_n — квадрати цілих чисел для всіх $n \geqslant 1998$.

(В'єтнамська математична олімпіада, 1998 р.)

Вправа 5. *Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ визначається в такий спосіб: $a_1 = 43$, $a_2 =$ 142 і $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}, n \geqslant 2$. а) Доведіть, що НСД$(a_n, a_{n+1}) = 1$. б) Доведіть, що для кожного натурального m існує безліч натуральних чисел n таких, що НСД$(a_n - 1, a_{n+1} - 1)$ ділиться на m*

без остачі.

(Болгарська математична олімпіада, 2000 р.)

Вправа 6. *Послідовність дійсних чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *визначається в такий спосіб:* $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ *і* a_{n+2} *— найбільше просте число, що є дільником числа* $a_n + a_{n+1}$. *Доведіть, що ця послідовність періодична.*

(Румунська математична олімпіада, 2000 р.)

Вправа 7. *Доведіть, що для чисел Фібоначчі виконується така рівність*

$$(F_{2n-1})^2 + (F_{2n+1})^2 + 1 = 3F_{2n-1}F_{2n+1},$$

для всіх натуральних $n \geqslant 1$.

(Словацька математична олімпіада, 2003 р.)

Вправа 8. *Доведіть, що жодне число Фібоначчі не є добутком щонайменше двох різних чисел Фібоначчі, більших* 1.

(Австрійська математична олімпіада, 1996 р.)

Вправа 9. *Нехай* k *— ціле число. Послідовність дійсних чисел* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *визначається в такий спосіб:*

$$y_1 = y_2 = 1 \ \text{ і } \ y_{n+2} = (4k-5)\, y_{n+1} - y_n + 4 - 2k,$$

для всіх натуральних $n \geqslant 1$. *Знайдіть усі такі* k, *для яких усі члени заданої послідовності будуть квадратами цілих чисел.*

(Канадська математична олімпіада, 2003 р.)

Вправа 10. *Послідовність дійсних чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *визначається в такий спосіб:*

$$a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20 \ \text{ і } \ a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n,$$

для всіх цілих $n \geqslant 1$. *Доведіть, що* $1 + 4a_n a_{n+1}$ *— квадрат цілого числа.*

(Південно-Корейська математична олімпіада, 2001 р.)

Розділ 5

Функціональні рівняння на математичних олімпіадах

5.1. Деякі теоретичні відомості про методи розв'язування функціональних рівнянь

Спочатку наведемо основні теоретичні відомості про функціональні рівняння та основні методи їх розв'язування.

Клас функцій, які вивчаються в шкільному курсі математики, порівняно невеликий. До них відносяться, наприклад, лінійна, степенева, показникова, тригонометричні функції. Інші функції дістаємо із основних за допомогою композицій та алгебраїчних дій над основними елементарними функціями.

Деяке співвідношення (рівність), з якого можна знайти невідому функцію, називаються *функціональним рівнянням*. Розв'язати функціональне рівняння — означає знайти невідомі функції, що входять до нього. Значний внесок у вивчення таких рівнянь вніс Коші. Функціональне рівняння $f(x+y) = f(x)+f(y)$ носить його ім'я.

Функціональні рівняння розв'язують різними методами.

Метод підстановок

Суть цього методу полягає ось у чому. Припустимо, що дане рівняння має розв'язок. Застосуємо до змінних, що входять в рівняння, деякі підстановки. Дістаємо систему рівнянь, одним із невідомих якої є шукана функція. Після розв'язування одержаної системи безпосередньою перевіркою необхідно переконатись, що знайдена функція задовольняє усім умовам задачі. Основна трудність цього методу полягає у виборі вдалих підстановок.

Метод застосування поняття групи

Суть цього методу є наступною. Нехай у функціональному рівнянні

$$a_1 f(g_1) + a_2 f(g_2) + \ldots + a_n f(g_n) = b \tag{5.1}$$

вирази, які стоять під знаком невідомої функції f є елементами групи G, яка складається із n функцій: $g_1(x) = x$, $g_2(x)$, $\ldots$,$g_n(x)$, причому коефіцієнти

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ та b — деякі функції. Припустимо, що рівняння (5.1) має розв'язок. Замінимо $x \to g_2(x)$. В результаті послідовність $g_1, g_2, \ldots, g_n$ перейде в послідовність $g_1 \circ g_2, g_2 \circ g_2, \ldots, g_n \circ g_2$, яка знову таки складається з усіх елементів групи G. Тому «невідомі» $f(g_1), f(g_2), \ldots, f(g_n)$ поміняються лише місцями і матимемо нове лінійне рівняння. Далі в рівнянні (5.1) зробимо заміни $x \to g_3(x), x \to g_4(x), \ldots, x \to g_n(n)$, після чого дістанемо систему із n лінійних рівнянь, яку слід розв'язати. Якщо розв'язок існує, то слід перевірити, чи задовольняє він рівняння (5.1).

Метод застосування елементів математичного аналізу

При розв'язуванні рівнянь Коші їхні розв'язки знаходяться за допомогою методів математичного аналізу зокрема таких, як границя послідовності і границя функції, неперервність функцій, диференційовність функцій тощо.

а) **Метод граничного переходу**. Суть цього методу полягає у наступному. Здійснюється підстановка, яка переводить вираз, який стоїть під знаком f в одному члені рівняння, у вираз, який стоїть під знаком f у другому його члені. Ця підстановка повторюється n разів. Дістанемо систему n лінійних рівнянь. Виключаючи послідовно невідомі, ми матимемо рівняння виду

$$f(x) = a_n f(b_n) + c_n,$$

де a_n, b_n, c_n — члени деяких послідовностей, n — фіксоване натуральне число (a_n, b_n, c_n — можуть бути і функціями від x).

Якщо існують границі при $n \to \infty$ послідовностей $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \text{const}$, то граничним переходом, використовуючи неперервність функції f, знаходимо вираз для $f(x)$. Звичайно, перевірка є складовою частиною розв'язування функціонального рівняння.

Цим методом можуть бути розв'язані в класі неперервних функцій рівняння виду

$$f(kx+b) = mf(x) + P(x),$$

$$f(kx+b) = f(x) \cdot a^{P(x)},$$

де $a > 0$, $k > 1$, $|m| < 1$ і $P(x)$ — многочлен.

б) **Метод диференціювання.** Він полягає у тому, що для знаходження розв'язку функціонального рівняння в класі диференційованих функцій доцільно диференціювати обидві його частини, за умови, що похідна існує. В результаті дістанемо функціональне рівняння, яке містить ще й похідну невідомої функції. Розв'язуючи це рівняння, як функціональне, відносно похідної, дістанемо, що шукана функція є однією з первісних для цієї похідної.

в) **Метод Коші.** Цим методом розв'язок функціонального рівняння знаходиться за допомогою спеціальних підстановок послідовно для натуральних, раціональних значень аргументу, а потім граничним переходом — для додатних дійсних x і, нарешті, розповсюджується на всі інші дійсні значення аргументу x.

Метод рекурентних співвідношень

Нехай задане функціональне рівняння натурального аргументу має вигляд деякого рекурентного співвідношення, тобто формули, яка виражає $f(n)$ через попередні значення $f(n-1), f(n-2)$ і т.д. Спочатку обчислюють значення функції від декількох перших чисел натурального ряду (при цьому використовується рекурентне співвідношення). Потім намагаються прогнозувати вид шуканої функції, після чого переконуються у справедливості створеної гіпотези за допомогою методу математичної індукції. Саме так знаходяться формули для n-го члена арифметичної та геометричної прогресій, послідовності Фібоначчі.

Крім того, слід нагадати ще й таке. Через $f : A \to B$ позначають функцію з областю визначення A, яка набуває значень із множини B (область значень функції f — це підмножина множини B). Функція $g : B \to A$ називається оберненою до функції f (її позначають f^{-1}), якщо справедливі такі тотожності: $g(f(x)) \equiv x$ та $f(g(y)) \equiv y$, для всіх $x \in A, y \in B$. Зрозуміло, що функція $f : A \to B$ буде мати обернену функцію тоді і лише тоді, коли для довільного елемента $y \in B$ існує елемент $x \in A$, що задовольняє умові $f(x) = y$, і для будь-яких двох різних елементів $x_1, x_2 \in A$ значення $f(x_1)$ та $f(x_2)$ також різні.

Композицією двох функцій $f : A \to B$ та $g : B \to C$ називається функція $h : A \to C$, яка визначається тотожністю: $h(x) \equiv g(f(x)), x \in A$. Аналогічно означається композиція і більшої кількості функцій.

Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, якщо різні значення аргументу відображаються в різні значення: для довільних $x_1, x_2 \in A$ таких, що $x_1 \neq x_2$ виконується $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Функція $f : A \to B$ називається *сюр'єктивною*, якщо її областю значень є уся множина B (вище ми зазначали, що, взагалі кажучи, область значень функції — це підмножина множини B). Коли розглядають сюр'єктивну функцію $f : A \to B$, то кажуть, що вона є відображенням множини A **на** множину B.

Відображення називають *бієктивним* (*бієкцією*, або *взаємно однозначним*), якщо воно є одночасно і ін'єктивним, і сюр'єктивним.

В наступних параграфах ми розглядатимемо різні функціональні рівняння. Область визначення шуканої функції зазвичай вказується в умові задачі: це може бути множина натуральних, цілих, дійсних чисел тощо. Також в умові задачі зазначається клас функцій, в якому слід розв'язати рівняння (наприклад, клас усіх функцій дійсної змінної, клас неперервних функцій, многочленів тощо).

5.2. Функціональні рівняння з натуральними і цілими змінними

Множина $\mathbb{N}$ усіх натуральних чисел є першою числовою системою, із якою ми зустрічалися. Є кілька важливих речей, які ми дізнаємося при вивченні множини $\mathbb{N}$. Мова йде про її природні поняття — додавання і множення на $\mathbb{N}$. Крім того, ми також дізнаємося про її впорядкованість: можемо порівнювати два натуральних числа. Таким чином, множина $\mathbb{N}$ — оснащена додаванням, множенням і впорядкованістю. Маючи справу з функціональними рівняннями на $\mathbb{N}$, ці властивості відіграватимуть фундаментальну роль. У деяких завданнях, цього може бути достатньо, щоб розв'язати функціональне рівняння, тобто достатньо скористатися однією із цих властивостей. Але деякі інші завдання вимагатимуть використання разом усіх цих фундаментальних властивостей множини натуральних чисел. Проілюструємо ці ідеї на конкретних олімпіадних задачах.

Задача 5.1. *Знайти усі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для яких*

1) $f(2) = 2$;

2) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ для усіх m і n із $\mathbb{N}$;

3) $f(m) < f(n)$, якщо $m < n$. *(Математичні змагання Індії, 2002 р.)*

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі скористаємося *методом математичної індукції.*

Припустимо, що існує така функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, яка задовольняє усім вимогам задачі. Спробуємо послідовно знаходити усі значення функції f. За допомогою умови 2) одержуємо:

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = (f(1))^2,$$

тобто

$$f(1) = (f(1))^2.$$

Оскільки $f(1)$ — натуральне число (у множині $\mathbb{N}$ число 0 відсутнє), то із одержаного співвідношення знаходимо, що $f(1) = 1$. Аналогічно, при $m = n = 2$ умова 2) дає співвідношення: $f(4) = (f(2))^2 = 4$. Далі умова 3) дає можливість знайти $f(3)$. Дійсно, так як $2 < 3 < 4$, то $f(2) < f(3) < f(4)$, тобто $2 < f(3) < 4$. Оскільки $f(3)$ — натуральне число, то $f(3) = 3$. Знаючи тепер значення $f(2) = 2$ і $f(3) = 3$, умова 2) дає можливість знайти $f(6)$. Дійсно,

$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) = 6$, тобто $f(6) = 6$. Далі умова 3) дає можливість знайти $f(5)$. Справді, оскільки $4 < 5 < 6$, то $f(4) < f(5) < f(6)$, тобто $4 < f(5) < 6$. Оскільки $f(5)$ — натуральне число, то $f(5) = 5$. Отже, ми знайшли такі значення нашої функції: $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 5$ і $f(6) = 6$. У нас виникає *гіпотеза*: $f(n) = n$ для усіх натуральних n. Застосуємо індукцію. Припустимо, що $f(1) = 1, f(2) = 2, \ldots, f(2k) = 2k$, де k — деяке натуральне число. Тоді умова 2) припущення дають:

$$f(2k+2) = f(2 \cdot (k+1)) = f(2) \cdot f(k+1) = 2 \cdot (k+1) = 2k+2,$$

тобто $f(2k+2) = 2k+2$. Далі, за умовою 3), одержуємо: з $2k < 2k+1 < 2k+2$ випливає $f(2k) < f(2k+1) < f(2k+2)$, тобто $2k < f(2k+1) < 2k+2$. Оскільки $f(2k+1)$ — натуральне число, то $f(2k+1) = 2k+1$. Отже, за принципом математичної індукції, одержуємо: $f(n) = n$ для будь-якого натурального n. Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція задовольняє усі умови задачі.

Відповідь. $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Ми використали дві важливі властивості у цьому розв'язанні: ***впорядкування*** *натуральних чисел* та ***принцип*** *індукції*. Ми використали усі три умови, що були задані в задачі. Давайте подивимося, що буде із результатом, коли ми послабимо умови на f.

Задача 5.2. *Знайти усі функції* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *для яких*

1) $f(2) = 2$;

2) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ *для усіх таких* m *і* n *із* $\mathbb{N}$, *що* $(m, n) = 1$;

3) $f(m) < f(n)$, *якщо* $m < n$.

Розв'язання. Ми доведемо, як і в задачі 5.1, що $f(n) = n$ для всіх натуральних n. Використовуючи ті ж самі міркування, ми доводимо, що $f(1) = 1$. Але нажаль ми не зможемо дістати, як ми це зробили у попередній задачі, що $f(4) = 4$. Умова 2) задачі 5.1 виконується для всіх пар (m, n) натуральних чисел, а умова 2) нашої задачі виконується лише для всіх пар (m, n) взаємно простих натуральних чисел. Тому, умова 2), нашої задачі, не може бути використана для одержання рівності $f(4) = (f(2))^2$. Однак, якщо довести, що $f(3) = 3$, то метод розв'язування, використаний у задачі 5.1, можна далі успішно застосувати і до нашої задачі. Дійсно, тоді матимемо:

$$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) = 6.$$

Оскільки $3 < 4 < 5 < 6$, тоді за умовою 3) нашої задачі знаходимо, що $f(3) < f(4) < f(5) < f(6)$, тобто $3 < f(4) < f(5) < 6$. Так як $f(4)$ і $f(5)$ — натуральні числа, то одержані обмеження дають: $f(4) = 4$, $f(5) = 5$. Далі ми можемо завершити розв'язання доведенням за індукцією, використовуючи те, що $(k, k-1) = 1$ для усіх натуральних $k \geqslant 2$.

Припустимо, що $f(k) = k$ для усіх $k \leqslant n$. Тоді за припущенням і умовою 2) матимемо: $f((n-1)n) = f(n-1)f(n) = (n-1)n$. Далі умова 3) дає:

$$n = f(n) < f(n+1) < f(n+2) < \ldots < f\left(n^2-n-1\right) < f((n-1)n) = \\ = (n-1)n,$$

тобто $n < f(n+1) < f(n+2) < \ldots < f\left(n^2-n-1\right) < n^2-n$. Оскільки $f(n+1)$, $f(n+2)$, $\ldots$, $f\left(n^2-n-1\right)$ натуральні числа і їх кількість дорівнює $n+1$, то із попередніх обмежень ми знаходимо, що $f(n+1) = n+1$, $f(n+2) = n+2, \ldots, f\left(n^2-n-1\right) = n^2-n-1$ і $f((n-1)n) = (n-1)n$. Отже, за принципом математичної індукції, одержуємо: $f(n) = n$ для будь-якого натурального n. Залишилося довести, що $f(3) = 3$. Це можна зробити в такий спосіб. Маємо

$$f(3)f(5) = f(3\cdot 5) = f(15) < f(18) = f(2\cdot 9) = f(2)f(9) = 2f(9)$$

і

$$f(9) < f(10) = f(2\cdot 5) = f(2)f(5) = 2f(5).$$

Звідки слідує, що $f(3)f(5) < 4f(5)$, а після скорочення на натуральне число $f(5)$, одержуємо, що $f(3) < 4$. Оскільки $2 = f(2) < f(3) < 4$, то $f(3) = 3$, бо $f(3)$ — натуральне число. Довівши все це і зробивши перевірку, ми завершуємо розв'язання нашої задачі.

Відповідь. $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Значення $f(2)$ не може бути довільним. Якщо ми візьмемо $f(2) = k$, то може не існувати функції, що задовольняє умовам 2) і 3) задачі 5.1, для певного значення $k \neq 2$. Продемонструємо це на прикладі наступної задачі.

Задача 5.3. *Доведіть, що не існує такої функції* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *для якої*

1) $f(2) = 3$*;*

2) $f(m\cdot n) = f(m)\cdot f(n)$ *для усіх* m *і* n *із* $\mathbb{N}$*;*

3) $f(m) < f(n)$*, якщо* $m < n$*.*

Розв'язання. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що існує функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для якої $f(2) = 3$ і виконуються умови 2) і 3) нашої задачі. Нехай $f(3) = l$, $l \in \mathbb{N}$. Використовуючи нерівність $2^3 < 3^2$, а також умови 2) і 3) нашої задачі, одержимо:

$$3^3 = (f(2))^3 = f\left(2^3\right) < f\left(3^2\right) = (f(3))^2 = l^2,$$

тобто $l > 5$.

З іншого боку, $3^3 < 2^5$. Тому умови 2) і 3) нашої задачі дають, що

$$l^3 = (f(3))^3 = f\left(3^3\right) < f\left(2^5\right) = (f(2))^5 = 3^5 = 243 < 343 = 7^3,$$

тобто $l < 7$. Оскільки $5 < l < 7$, то $l = 6$, тобто $f(3) = 6$. Далі, розглянемо наступну нерівність: $3^8 = 6561 < 8192 = 2^{13}$. За умовами 2) і 3) нашої задачі, матимемо: $6^8 = (f(3))^8 = f\left(3^8\right) < f\left(2^{13}\right) = (f(2))^{13} = 3^{13}$, тобто $2^8 < 3^5$, що є хибним, бо $2^8 = 256$, а $3^5 = 243$. Одержане протиріччя і доводить, що наше припущення, про існування потрібної функції, неправильне. Отже, таких функцій не існує.

З іншого боку, якщо ми в задачі 5.1, умову 1) задамо так, що $f(2) = 4$, то функція $f(n) = n^2$ буде задовольняти усі умови задачі. $\square$

А тепер дослідимо, що трапиться, якщо ми ослабимо умову 3) в задачі 5.1. Адже ця умова задає монотонне зростання шуканої функції.

Задача 5.4. *Скільки існує функцій $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для яких*

1) $f(2) = 2$;

2) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ для усіх m і n із $\mathbb{N}$.

Розв'язання. Покажемо, що таких функцій існує безліч. Для цього, ми скористаємося тим, що будь-яке задане натуральне число n можна подати у вигляді добутку натуральних степенів простих чисел, причому таке подання єдине:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

де $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ — прості числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ — натуральні числа. Таке подання натурального числа n називають канонічним розкладом натурального числа n. Умова 2) задачі показує, що для того, щоб знайти значення f у точці $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, досить знати її значення $f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_k)$ в усіх простих значеннях аргументу: $p_1, p_2, \dots, p_k$. У нас є її значення при $p = 2$. Якщо ми довільно означимо функцію f для усіх простих $p \neq 2$, то умова 2) задачі дає нам можливість знайти усі її інші значення для натуральних значень аргументу, використовуючи їхній канонічний розклад. Зверніть увагу на те, що умова 2) дає можливість визначити, що $f(1) = 1$.

Для прикладу, розглянемо множину усіх простих чисел (без двійки) в порядку зростання: $3 = p_2 < p_3 < p_4 < \dots$. Означимо для кожного натурального $k \geqslant 1$ функцію f_k для якої $f_k(p_i) = p_{i+k}$ для усіх $i \geqslant 2$. Якщо $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_l^{\alpha_l}$ — канонічний розклад натурального числа n, то означимо $f_k(n) = f_k(q_1)^{\alpha_1} f_k(q_2)^{\alpha_2} \dots f_k(q_l)^{\alpha_l}$.

Таким чином, перша шукана функція f_1 означатиметься так. Для неї $f_1(3) = 5, f_1(5) = 7, f_1(7) = 11, \dots$ Якщо ми захочемо знайти значення $f_1(15)$, то ми його отримаємо його за допомогою умови 2): $f_1(15) = f_1(3 \cdot 5) = f_1(3) \cdot f_1(5) = 5 \cdot 7 = 35$. Аналогічно ми можемо знаходити й інші значення, наприклад, $f_1(16) = f_1\left(2^4\right) = f_1(2)^4 = 2^4 = 16$. Помічаємо, що $f_1(16) < f_1(15)$.

Далі, друга шукана функція f_2 означатиметься так. Для неї $f_2(3) = 7$, $f_2(5) = 11$, $f_2(7) = 13$, ... Якщо ми захочемо знайти значення $f_2(15)$, то ми його отримаємо його за допомогою умови 2): $f_2(15) = f_2(3 \cdot 5) = f_2(3) \cdot f_2(5) = 7 \cdot 11 = 55$. Аналогічно ми можемо знаходити й інші значення, наприклад, $f_2(32) = f_2\left(2^5\right) = f_2(2)^5 = 2^5 = 32$. Помічаємо, що $f_2(32) < f_2(15)$. Усі означені нами функції є шуканими, бо задовольнятимуть умовам 1) і 2) нашої задачі, а це означає, що їх буде безліч.

Відповідь. Таких функцій існує безліч. □

У попередніх задачах ми розглядали ті функції, що приймають натуральні значення. Це допомагало нам знаходити фіксовані значення f. Конкретно, ми використовували той факт, що між натуральними числами n та $n+1$ не існує цілого числа. Але це неможливо, коли ми використаємо раціональні числа чи дійсні числа. У цих випадках ми можемо «втиснути» ще одне число між двома довільними числами. Припустимо, що f приймає значення в деякій підмножині множини $\mathbb{R}$. Що ми зможемо сказати про розв'язок задачі 5.1?

Задача 5.5. *Нехай функція $f : \mathbb{N} \to [1; \infty)$ є такою, що*

1) $f(2) = 2$;

2) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ для усіх m і n із $\mathbb{N}$;

3) $f(m) < f(n)$, якщо $m < n$.

Доведіть, що $f(n) = n$ для всіх натуральних n.

Розв'язання. Аналогічно, як і в попередніх задачах ми легко знаходимо, що $f(1) = 1$ і $f(4) = 4$. На жаль, ми не зможемо скористатися 3), щоб знайти значення $f(3)$. Хоча у нас є такі обмеження:

$$2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4,$$

вони не дають можливості обґрунтувати, що $f(3) = 3$, подібно до того, як ми це зробили в задачі 5.1.

Оскільки числовий промінь $[1; \infty)$ є підмножиною дійсних чисел, містить нескінченно багато (насправді незчисленну кількість) дійсних чисел, які є можливими кандидатами на $f(3)$, то існує необхідність у прийнятті іншої стратегії пошуку значень функції f, яка відрізняється від попередньої. Використовуючи умову 2) та індукцію легко довести, що $f\left(2^k\right) = 2^k$ для будь-якого натурального k. Нехай для деякого натурального m маємо, що

$f(m) = l$, де $l \in [1; \infty)$. Використовуючи умову 2), та індукцію легко довести, що $f(m^n) = l^n$ для будь-якого натурального n. Нехай натуральне число k є таким, що $2^k \leqslant m^n < 2^{k+1}$, тоді за умовами 2) і 3) одержуємо, що $2^k \leqslant l^n < 2^{k+1}$. Із цих двох нерівностей, шляхом ділення, одержуємо нерівність:

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{m}{l}\right)^n < 2, \tag{5.2}$$

яка виконується для будь-яких натуральних чисел n. Якщо $m > l$, то виберемо n таким, щоб $n > l/(m-l)$. Тоді, при такому n, матимемо:

$$\left(\frac{m}{l}\right)^n = \left(1 + \frac{m-l}{l}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{m-l}{l} > 2,$$

що суперечить нерівності (5.2). Якщо $m < l$, то виберемо n таким, щоб $n > m/(l-m)$. Тоді, при такому n, матимемо:

$$\left(\frac{l}{m}\right)^n = \left(1 + \frac{l-m}{m}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{l-m}{m} > 2,$$

тобто $\left(\frac{m}{l}\right)^n < \frac{1}{2}$, що також суперечить нерівності (5.2). Одержані суперечності і дають $m = l$, тобто $f(m) = m$ для всіх натуральних m, що і треба було довести. □

Існує ще одна корисна властивість натуральних чисел, яку часто використовується при розв'язуванні функціональних рівнянь натурального аргументу. Її називають *принципом впорядкування* на $\mathbb{N}$. Вона стверджує, що будь-яка непорожня підмножина в $\mathbb{N}$ має найменший елемент. Таким чином, якщо $S \subset \mathbb{N}$ і $S \neq \varnothing$, то існує єдине $m \in S$ таке, що $m \leqslant n$ для всіх $n \in S$. Цей простий на вигляд, інтуїтивно зрозумілий принцип є надзвичайно потужним. Насправді він еквівалентний до принципу математичної індукції (доведіть це!). Нижче ми побачимо, як така форма математичної індукції може бути використана для розв'язання функціональних рівнянь натурального аргументу.

Задача 5.6. *Нехай функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є такою, що*

$$f(n+1) > f(f(n))$$

для всіх натуральних n. Доведіть, що $f(n) = n$ для будь-якого натурального n.

(Міжнародна математична олімпіада, 1997 р.)

Розв'язання. Нехай d — найменший елемент у множині значень функції f, тобто $d = \min\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$. За принципом впорядкування, про який було сказано вище, такий елемент d існує і він єдиний. Нехай m із $\mathbb{N}$ є таким, що $d = f(m)$. Якщо $m > 1$, то за умовою задачі $d = f(m) > f(f(m-1))$. Ця нерівність означає, що $f(m-1)$ є таким значенням аргументу нашої функції f, що значення функції f у ньому менше за d — найменший елемент множини

$\{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$ значень нашої функції. Дістали суперечність. Таким чином, $m = 1$ і наша функція f приймає найменше значення $f(1)$.

Тепер розглянемо таку підмножину множини значень нашої функції: $\{f(n)|\, n \geqslant 2\}$. Аналогічно, як було зроблено в попередньому пункті розв'язування, ми можемо встановити, що найменший елемент нескінченної множини $\{f(n)|n \geqslant 2\}$ є $f(2)$. Крім того, $f(1) < f(2)$, в силу вибору $f(1)$. Дійсно, якщо припустити, що $f(1) = f(2)$, то за умовою одержуємо, що $f(1) = f(2) > f(f(1))$, тобто $f(1) > f(f(1))$, що суперечить вибору $f(1)$. Аналогічні міркування можуть бути продовжені і ми отримаємо, що

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots, \tag{5.3}$$

тобто f монотонно зростає.

Зверніть увагу на те, що $f(1) \geqslant 1$, а із (5.3) випливає, що $f(k) \geqslant k$ для будь-якого натурального k. Припустимо, що для деякого натурального k виконується нерівність $f(k) > k$. Тоді $f(k) \geqslant k+1$. Із (5.3) одержуємо, що $f(f(k)) \geqslant f(k+1)$, а за умовою задачі $f(k+1) > f(f(k))$. Одержали протиріччя. Таким чином, $f(k) = k$ для будь-якого натурального k.

Можна було б міркувати інакше. Як і в попередньому кроці, ми покажемо, що $f(1)$ є найменшим елементом множини $\{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$, а $f(2)$ є найменшим елементом множини $\{f(n)|n \geqslant 2\}$. Якщо припустити, що $f(1) > 1$, то $f(1) \geqslant 2$. Тому $f(f(1)) \geqslant f(2)$, бо $f(2)$ є найменшим елементом множини $\{f(n)|n \geqslant 2\}$. Але це суперечить заданій умові. Тому $f(1) = 1$. Тепер позначимо $g(n) = f(n+1) - 1$ для всіх $n \geqslant 1$. Тоді матимемо, що

$$g(g(n)) = g(f(n+1) - 1) = f(f(n+1)) - 1 < f(n+2) - 1 = g(n+1),$$

тобто $g(g(n)) < g(n+1)$ для усіх натуральних $n \geqslant 1$. Таким чином, функція g задовольняє тим самим умовам, що і функція f. Тому, попередні міркування дають, що $g(1) = 1$, тобто $f(2) = 2$. Далі, індукцією доводимо, що $f(n) = n$ для усіх натуральних $n \geqslant 1$. Дійсно, нехай $f(k) = k$ для деякого натурального k, тоді і $g(k) = k$ для цього ж k. Так як $g(k) = k$ (за припущенням), то $f(k+1) - 1 = k$, тобто $f(k+1) = k+1$, що і завершує доведення кроку. Тоді, за *принципом математичної індукції* $f(n) = n$ для всіх натуральних n, що і треба було довести. □

Задача 5.7. *Знайти усі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для яких*

$$f(f(m) + f(n)) = m + n,$$

для усіх натуральних m і n.

Розв'язання. Ми доведемо, що f є тотожною функцією на $\mathbb{N}$, тобто що $f(n) = n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Для початку доведемо, що умова задачі забезпечує таку властивість функції: різним значенням аргумента відповідають різні значення функції (нагадаємо, що функція з такою властивістю називається ін'єктивною). Дійсно, якщо m і n різні натуральні числа, для яких $f(m) = f(n)$, то $f(m) + f(n) = f(n) + f(n)$. Звідки слідує, що $f(f(m)+f(n)) = f(f(n)+f(n))$. Використовуючи умову задачі, одержуємо, що $m+n = n+n$, тобто $m = n$, що суперечить припущенню. Таким чином, шукана функція f — ін'єктивна. Далі, якщо $k < n$, то за умовою задачі:

$$f(f(m+k)+f(n-k)) = (m+k)+(n-k) = m+n = f(f(m)+f(n)),$$

тобто $f(f(m+k)+f(n-k)) = f(f(m)+f(n))$. Оскільки f ін'єктивна, то

$$f(m+k)+f(n-k) = f(m)+f(n), \tag{5.4}$$

для будь-яких натуральних m, n, k, $k < n$.

Нехай $f(1) = a$, де $a \in \mathbb{N}$ і $a > 1$, тоді $a \geqslant 2$. За умовою задачі матимемо, що

$$f(2a) = f(a+a) = f(f(1)+f(1)) = 1+1 = 2,$$

тобто $f(2a) = 2$. Аналогічно матимемо, що

$$f(a+2) = f(f(1)+f(2a)) = 1+2a,$$

тобто $f(2+a) = 1+2a$. Якщо $a = 2$, то із останніх двох одержаних значень, отримуємо, що $f(4) = 2$ і $f(4) = 5$, що неможливо для функцій. Отже, $a > 2$. Тоді за допомогою (5.4) одержуємо:

$$f(1)+f(2a) = f(1+(a-2))+f(2a-(a-2)) = f(a-1)+f(a+2),$$

тобто $f(1)+f(2a) = f(a-1)+f(a+2)$. Враховуючи попередньо одержані значення шуканої функції, із останньої рівності отримуємо: $a+2 = f(a-1)+1+2a$, тобто $f(a-1) = 1-a$, що неможливо, бо при $a > 2$ одержуємо, що $1-a < -1 < 0$. Таким чином, наше припущення, що $a > 1$ є хибним. Тому, $a = 1$ і $f(1) = 1$. Далі, $2 = f(2a) = f(2)$, тобто $f(2) = 2$.

Далі застосуємо індукцію. Нехай $f(k) = k$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$, де n — деяке натуральне число. Тоді за умовою задачі, одержуємо:

$$n+1 = f(f(n)+f(1)) = f(n+1),$$

що і завершує доведення кроку. Таким чином, за принципом математичної індукції, ми одержуємо, що $f(n) = n$ для будь-якого натурального числа n.

Відповідь. $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Задача 5.8. *Нехай $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — монотонно зростаюча функція, для якої виконується рівність $f(f(n)) = 3n$ для будь-якого натурального n. Знайдіть $f(2012)$.*

Розв'язання. З умови задачі випливає, що різним значенням аргумента відповідають різні значення функції (тобто те, що шукана функція f є ін'єктивною). Справді, нехай m і n — такі натуральні числа, що $m \neq n$ і $f(m) = f(n)$. Тоді, $f(f(m)) = f(f(n))$, тобто $3m = 3n$, а отже і $m = n$. Протиріччя.

Далі, із умови задачі знаходимо, що $f(3n) = f(f(f(n))) = 3f(n)$, тобто $f(3n) = 3f(n)$ для будь-якого натурального n. Зокрема $f(3) = 3f(1)$. Якщо $f(1) = 1$, то одержуємо:

$$3 = 3 \cdot 1 = f(f(1)) = f(1) = 1,$$

що дає неправильну рівність $3 = 1$. Одержане протиріччя дає нам, що $f(1) > 1$. Враховуючи монотонність нашої функції, одержуємо, що $3 = f(f(1)) > f(1) > 1$, тобто $f(1) = 2$. Далі, $f(2) = f(f(1)) = 3$. Крім того,

$$f(3) = 3f(1) = 3 \cdot 2 = 6, f(6) = f(3 \cdot 2) = 3f(2) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Оскільки f монотонно зростає, то

$$6 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 9,$$

тобто $f(4) = 7$ і $f(5) = 8$, як проміжні натуральні значення між 6 і 9. Ці знайдені значення нашої функції дають можливість знайти наступні:

$$f(7) = f(f(4)) = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$f(8) = f(f(5)) = 3 \cdot 5 = 15,$$

$$f(9) = f(f(6)) = 3 \cdot 6 = 18$$

і

$$f(12) = f(f(7)) = 3 \cdot 7 = 21.$$

Значення $f(9) = 12$ і $f(12) = 21$ за допомогою монотонного зростання нашої функції дають можливість знайти проміжні значення: $f(10) = 19$ і $f(11) = 20$.

Якщо для деякого натурального k виконуються рівності $f(k) = n$ і $f(k+1) = n + 1$, де n деяке натуральне. Тоді за умовою задачі виконуватимуться і такі рівності:

$$f(n) = f(f(k)) = 3k$$

і

$$f(n+1) = f(f(k+1)) = 3(k+1) = 3k+3.$$

Якщо для деякого натурального k виконуються рівності $f(k) = n$ і $f(k+1) = n + 3$, де n деяке натуральне, то аналогічно матимемо, що $f(n) = 3k$ і

$f(n+3) = 3k+3$. Тоді, для цього випадку, монотонність f дає, що $f(n+1) = 3k+1$ і $f(n+2) = 3k+2$.

Тепер нехай натуральне число n є таким, що $3^m \leqslant n < 2\cdot 3^m$ для деякого натурального m. Тоді, для цього випадку,

$$f(3^m) = 3^m f(1) = 2\cdot 3^m,$$
$$f(2\cdot 3^m) = f(f(3^m)) = 3\cdot 3^m = 3^{m+1}.$$

Тоді монотонність нашої функції f даватиме:

$$2\cdot 3^m = f(3^m) < f(3^m+1) < \ldots < f(3^m + (3^m - 1)) < f(2\cdot 3^m) = 3^{m+1},$$

тобто проміжні значення функції f будуть такими:

$$f(3^m + i) = 2\cdot 3^m + i \quad \text{для усіх } i = 0, 1, 2, \ldots, 3^m.$$

Таким чином, $f(n) = n + 3^m$ для усіх натуральних n, що задовольняють умову $3^m \leqslant n \leqslant 2\cdot 3^m$.

Якщо ж $2\cdot 3^m \leqslant n \leqslant 3^{m+1}$, то $n = 2\cdot 3^m + j$, де $j = 0, 1, 2, \ldots, 3^m$. У цьому випадку одержуємо:

$$f(n) = f(2\cdot 3^m + j) = f(f(3^m + j)) = 3(3^m + j) = 3^{m+1} + 3j = 3n - 3^{m+1}.$$

Отже, ми отримали таке описання для значень $f(n)$:

$$f(n) = \begin{cases} n + 3^m, & \text{для } 3^m \leqslant n \leqslant 2\cdot 3^m, \\ 3n - 3^{m+1}, & \text{для } 2\cdot 3^m \leqslant n \leqslant 3^{m+1}. \end{cases}$$

Тепер можна знайти $f(2012)$. Оскільки $1458 = 2\cdot 3^6 < 2012 < 2187 = 3^7$, то $f(2012) = 3\cdot 2012 - 3^7 = 6036 - 2187 = 3849$.

Відповідь. $f(2012) = 3849$. □

Задача 5.9. *Знайти усі функції $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, які задовольняють рівність*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 2010$$

для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ (тут $\mathbb{N}_0$ — множина усіх цілих невід'ємних чисел).

Розв'язання. У цій задачі ми продемонструємо деякі відомі факти різницевих рівнянь, які можна застосовувати для розв'язування окремих функціональних рівнянь натурального аргументу.

Нехай $f(0) = m$, де m — деяке ціле невід'ємне число.

Продемонструємо метод обчислення такого числа m. Для більш зручніших обчислень, запишемо число $2010 = 3k$, де $k = 670$. Маємо

$$f(m) = f(f(0)) = 3k - f(0) = 3k - m,$$
$$f(3k - m) = f(f(m)) = 2m + 3k - f(m) = 3m,$$

$$f(3m) = f(f(3k-m)) = 2(3k-m) + 3k - f(3k-m) = 9k - 5m.$$

Ці одержані значення шуканої функції пов'язані із коефіцієнтами біля k та m. Одержані початкові значення цих коефіцієнтів дають нам можливість знайти рекурентні співвідношення для них. Для цього означимо наступні дві числові послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ у такий спосіб:

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_{n+1} = -a_n + 2a_{n-1} \quad \text{для усіх } n \geqslant 2;$$

$$b_1 = 0, b_2 = 3, b_{n+1} = -b_n + 2b_{n-1} + 3 \quad \text{для усіх } n \geqslant 2.$$

Покажемо за індукцією, що означені нами послідовності коефіцієнтів біля m і k задовольнятимуть гіпотезу. Припустимо, що для деякого n виконується співвідношення: $f(a_{n-1}m + b_{n-1}k) = a_n m + b_n k$. Доведемо, що тоді виконуватиметься і таке співвідношення: $f(a_n m + b_n k) = a_{n+1}m + b_{n+1}k$. Справді,

$$\begin{aligned} f(a_n m + b_n k) &= f(f(a_{n-1}m + b_{n-1}k)) = \\ &= 2(a_{n-1}m + b_{n-1}k) + 3k - f(a_{n-1}m + b_{n-1}k) = \\ &= 2a_{n-1}m + (2b_{n-1} + 3)k - (a_n m + b_n k) = \\ &= (-a_n + 2a_{n-1})m + (-b_n + 2b_{n-1} + 3)k = a_{n+1}m + b_{n+1}k, \end{aligned}$$

що і завершує доведення кроку. Оскільки це співвідношення виконується для $n = 1$, то за принципом математичної індукції співвідношення

$$f(a_n m + b_n k) = a_{n+1}m + b_{n+1}k$$

виконується для усіх натуральних n.

Тепер розв'яжемо ці рекурентні співвідношення, тобто знайдемо формули для n-них членів цих послідовностей. Для цього перепишемо їх у вигляді

$$a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} = 0, a_1 = 1, a_2 = -1;$$

$$b_{n+1} + b_n - 2b_{n-1} = 3, b_1 = 0, b_2 = 3.$$

Зазначимо, що послідовність $\{a_n\}$ є зворотною послідовністю другого порядку (див. сторінку 130 розділу 4). Послідовність $\{b_n\}$, на перший погляд, не є зворотною. Проте помітимо, що якщо члени послідовності $\{b_n\}$ шукати у вигляді $b_i = c_i + i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то для послідовності $\{c_n\}$ матиме місце таке ж рекурентне співвідношення, що і для послідовності $\{a_n\}$: $c_{n+1} + c_n - 2c_{n-1} = 0$, тобто послідовність $\{c_n\}$ є зворотною послідовністю другого порядку.

Отже, для послідовностей $\{a_n\}$ і $\{c_n\}$ характеристичні рівняння будуть однаковими: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Це рівняння має два різних дійсних кореня $\lambda = 1$ і $\lambda = -2$. Повернувшись до b_n, знаходимо, що формули n-них членів мають вигляд:

$$a_n = a \cdot 1^n + b \cdot (-2)^n, \qquad b_n = c \cdot 1^n + d \cdot (-2)^n + n,$$

де константи a, b, c, d знаходяться за допомогою перших двох членів кожної послідовності:

$$\begin{cases} a - 2b = 1, \\ a + 4b = -1; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} c - 2d + 1 = 0, \\ c + 4d + 2 = 3. \end{cases}$$

Розв’язавши ці системи, знаходимо, що

$$a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}, d = \frac{1}{3}.$$

Таким чином,

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}2^n\right),$$

і

$$b_n = -\frac{1}{3}\left(1 + (-1)^{n+1}2^n\right) + n = -a_n + n.$$

Зазначимо, що формулу n-го члена для послідовності $\{b_n\}$ можна було б знайти в схожий, але дещо інший, спосіб. Насправді ця послідовність є зворотною послідовністю третього порядку, оскільки з рівностей $b_{n+1} + b_n - 2b_{n-1} = 3$ та $b_n + b_{n-1} - 2b_{n-2} = 3$ отримуємо рекурентне співвідношення $b_{n+1} = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$. Характеристичне рівняння для цієї послідовності має вигляд $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Воно має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Тоді n-ий член послідовності $\{b_n\}$ слід шукати у вигляді $b_n = u_1 \cdot 1^n + u_2 \cdot n \cdot 1^n + u_3 \cdot (-2)^n$, де значення констант u_1, u_2, u_3 визначають з початкових умов $b_1 = 0$, $b_2 = 3$, $b_3 = 0$.

Оскільки множиною значень нашої функції є множина $\mathbb{N}_0$, то $f(l) \geqslant 0$ для всіх $l \in \mathbb{N}_0$. Звідси випливає, що

$$a_n(m-k) + nk = a_n m + b_n k = f(a_{n-1}m + b_{n-1}k) \geqslant 0,$$

для усіх $n \geqslant 2$. Однак, формула для a_n показує нам, що $a_n > 0$ для усіх непарних n, і $a_n < 0$ для усіх парних значень n. Звідси випливає, що

$$m - k + \frac{nk}{a_n} \geqslant 0, \text{ якщо } n \text{ — непарне,}$$

і

$$m - k + \frac{nk}{a_n} \leqslant 0, \text{ якщо } n \text{ — парне.}$$

Але $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nl}{a_n} = 0$, тому із двох попередніх нерівностей випливає, що $m - k \geqslant 0$ і $m - k \leqslant 0$, тобто $m = k$ і $f(0) = k$.

Далі, розглянемо нову функцію $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, яка задовольняє рівності

$$g(n) = f(n+1) - 1.$$

Тоді матимемо, що

$$g(g(n)) = f(g(n)+1) - 1 = f(f(n+1)) - 1 =$$
$$= 2(n+1) + 3k - f(n+1) - 1 = 2n + 3k - g(n).$$

Отже, функція g є розв'язком функціонального рівняння

$$g(g(n)) + g(n) = 2n + 3k,$$

яке співпадає із даним функціональним рівнянням. Тому, аналогічно одержуємо, що $g(0) = k$. Оскільки $g(0) = f(1) - 1$, то одержуємо, що $f(1) = 1 + k$.

Далі застосуємо математичну індукцію. Припустимо, що $f(i) = i + k$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$, де m — деяке натуральне число. Тоді припущення індукції буде виконуватися і для функції g, тобто $g(m-1) = (m-1)+k$. Звідки одержуємо, що $f(m) - 1 = (m-1) + k$, тобто $f(m) = m + k$, що і завершує доведення кроку.

Тому, за принципом математичної індукції, одержуємо, що $f(n) = n + k$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Відповідь. $f(n) = n + 670$, $n \in \mathbb{N}_0$. □

Цю задачу можна було б розв'язати й іншим способом, що використовує *зворотні послідовності*. Для фіксованого цілого невід'ємного m означимо послідовність невід'ємних цілих чисел $c_n = f^n(m)$, де $f^n(m) = f\left(f^{n-1}(m)\right)$. Тоді задане співвідношення запишеться $c_2 + c_1 = 2m + 3k$, де $k = 670$. Далі, ми звідси одержуємо рекурентне співвідношення $c_{n+2} + c_{n+1} = 2c_n + 3k$. Аналогічно до попередніх міркувань, його загальний розв'язок матиме вигляд:

$$c_n = C + D \cdot (-2)^n + nk,$$

де C і D — константи. Користуючись тим, що $c_n \geqslant 0$ для усіх натуральних n, ми одержуємо, що $D = 0$. Отже, $c_n = C + nk$, для деякої константи C. Оскільки $2m + 3k = c_2 + c_1 = 2C + 3k$, то $C = m$. Звідси випливає, що

$$f(m) = c_1 = C + k = m + k.$$

Так як такі дії можна зробити для будь-якого заданого цілого невід'ємного m, то ми остаточно одержуємо, що $f(m) = m + k$ для кожного $m \in \mathbb{N}_0$.

Задача 5.10. *Функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задовольняє наступним умовам:*

а) $f(1) = 1$;

б) $f(3) = 3$;

в) $f(2n) = f(n)$;

г) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$;

д) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$.

Знайдіть кількість усіх таких значень n, для яких $f(n) = n$ і $1 \leqslant n \leqslant 1988$.

(Міжнародна математична олімпіада, 1988 р.)

Розв'язання. Ця задача є однією із елегантних задач про функціональні рівняння натурального аргументу, що пропонувалися на Міжнародних математичних олімпіадах.

Спочатку обчислимо декілька перших значень функції f, що будуть задовольняти умовам задачі.

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(2) = f(1) = 1,$$

$$f(4) = f(2) = 1, \quad f(5) = 2f(3) - f(1) = 6 - 1 = 5,$$

$$f(6) = f(3) = 3, \quad f(7) = 3f(3) - 2f(1) = 9 - 2 = 7,$$

$$f(8) = f(4) = 1, \quad f(9) = 2f(5) - f(2) = 10 - 1 = 9,$$

$$f(10) = f(5) = 5, \quad f(11) = 3f(5) - 2f(2) = 15 - 2 = 13,$$

$$f(12) = f(6) = 3, \quad f(13) = 2f(7) - f(3) = 14 - 3 = 11,$$

$$f(14) = f(7) = 7, \quad f(15) = 3f(7) - 2f(3) = 21 - 6 = 15,$$

$$f(16) = f(8) = 1.$$

Запишемо ці перші значення функції f у двійковій системі числення, тобто у системі числення з основою 2.

$$f(1_2) = f(1) = 1 = 1_2,$$
$$f(10_2) = f(2) = 1 = 01_2,$$
$$f(11_2) = f(3) = 3 = 11_2,$$
$$f(100_2) = f(4) = 1 = 001_2,$$
$$f(101_2) = f(5) = 5 = 101_2,$$
$$f(110_2) = f(6) = 3 = 011_2,$$
$$f(111_2) = f(7) = 7 = 111_2,$$
$$f(1000_2) = f(8) = 1 = 0001_2,$$
$$f(1001_2) = f(9) = 9 = 1001_2.$$

Помічаємо наступну закономірність. Якщо число n подати у двійковій системі числення, то $f(n)$ буде мати таке саме подання, але у зворотному напрямку. Іншими словами, якщо $n = \overline{\alpha_0 \ldots \alpha_k}_2$, то $f(n) = \overline{\alpha_k \ldots \alpha_0}_2$, де $\alpha_j \in \{0; 1\}$ для $0 \leqslant j \leqslant k$. Доведемо це методом математичної індукції.

База індукції. Для чисел $1 = 1_2$, $2 = 10_2$ і $3 = 11_2$, то справедливість нашого твердження випливає з попередніх обчислень, тобто з умов а), б), в).

Крок індукції. Припустимо, що твердження доведено для усіх чисел, у двійковому записі яких менше $k+1$ цифри. Доведемо, використовуючи припущення, що твердження буде справедливим і для чисел, двійковий запис яких має рівно $k+1$ цифру. Нехай $n = \overline{\alpha_0\ldots\alpha_k}_2$, тобто

$$n = \alpha_0 2^k + \alpha_1 2^{k-1} + \ldots + \alpha_k, \quad \alpha_0 = 1.$$

Потрібно розглянути три випадки: 1) $\alpha_k = 0$; 2) $\alpha_k = 1, \alpha_{k-1} = 0$ і 3) $\alpha_k = \alpha_{k-1} = 1$.

1) Нехай $\alpha_k = 0$, тоді $n = \overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-1}0}_2$ і $n = 2\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-1}}_2$. Отже, використовуючи умову в), матимемо:

$$f(n) = f\left(2\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-1}}_2\right) = f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-1}}_2\right) = \overline{\alpha_{k-1}\ldots\alpha_0}_2 = \overline{0\alpha_{k-1}\ldots\alpha_0}_2,$$

тобто у цьому випадку $f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_k}_2\right) = \overline{\alpha_k\ldots\alpha_0}_2$, що і треба було довести.

2) Нехай $\alpha_k = 1, \alpha_{k-1} = 0$, тоді $n = \overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}01}_2$ і $n = 4\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2 + 1$. Отже, використовуючи умову г), матимемо:

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(4\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2 + 1\right) = 2f\left(2\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2 + 1\right) - f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}\right) = \\ &= 2f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}1}_2\right) - f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2\right) = 2\cdot\overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 - \overline{\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0} = \\ &= \overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 + \overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 - \overline{\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 = \overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 + \overline{1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}}_2 = \\ &= \overline{10\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2, \end{aligned}$$

тобто $f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_k}_2\right) = \overline{\alpha_k\ldots\alpha_0}_2$, що і треба було довести.

3) Нехай $\alpha_k = 1,\ \alpha_{k-1} = 1$, тоді $n = \overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}11}_2$ і $n = 4\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2 + 3$. Отже, використовуючи умову д), матимемо:

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(4\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2 + 3\right) = 3f\left(2\cdot\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2 + 1\right) - 2f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}\right) = \\ &= 3f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}1}_2\right) - 2f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_{k-2}}_2\right) = 3\cdot\overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 - 2\cdot\overline{\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0} = \\ &= \overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 + 2\cdot\overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 - 2\cdot\overline{\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 = \\ &= \overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 + \overline{10}_2\cdot\overline{1\underbrace{0\ldots0}_{k-1}}_2 = \overline{1\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2 + \overline{1\underbrace{0\ldots0}_{k}}_2 = \\ &= \overline{11\alpha_{k-2}\ldots\alpha_0}_2, \end{aligned}$$

тобто $f\left(\overline{\alpha_0\ldots\alpha_k}_2\right) = \overline{\alpha_k\ldots\alpha_0}_2$, що і треба було довести.

Задача звелася до знаходження кількості натуральних чисел, що не перевищують 1988, двійковий запис яких симетричний. Зрозуміло, що у двійковій системі числення кількість симетричних n-цифрових чисел, за правилом добутку, дорівнює $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$. Оскільки лише два 11-цифрових симетричних числа

11111111111_2 і 11111011111_2 більші за 1988, то шукана кількість дорівнює

$$\left(1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5\right)-2=92.$$

Відповідь. 92. □

5.3. Функціональні рівняння з дійсними змінними

Ми бачили в попередньому розділі, як властивості множини всіх натуральних чисел, були успішно використані для знаходження розв'язків функціональних рівнянь на $\mathbb{N}$. Зокрема, ми використовували дві популярні ідеї: а) принцип математичної індукції, і б) відсутність натурального числа між натуральними числами n і $n+1$. Таким чином, у нас з'являлося безпосереднє наступне значення $f\,(n)$ для будь-якого натурального числа n. Ми також бачили, як інший варіант індукції, а саме принцип зворотної індукції, може бути використаний в деяких завданнях. У випадку множини $\mathbb{Z}$ ми використовували властивість порядку її елементів, а саме кожне ціле число має безпосереднього попередника і безпосереднього наступника. Саме ця властивість формувала основу розв'язання для багатьох функціональних рівнянь на $\mathbb{Z}$.

Однак ці властивості зникають, коли ми розглядатимемо множину $\mathbb{R}$. Подивіться будь-ласка коментар перед задачею 5.5 на сторінці 170. Це загальні труднощі при роботі з функціональними рівняннями на $\mathbb{R}$. Ми ще раз хочемо підкреслити, що не існує загального методу, який забезпечує «рівномірне» розв'язання функціонального рівняння на $\mathbb{R}$. Кожне таке рівняння має розв'язуватися виключно по суті.

Умови обмеженості функції на відрізку відіграють надзвичайно важливу роль в одержані окремих значень шуканої функції на множині. Крім того, ми будемо використовувати додавання, множення та наявність обернених значень будь-яких дійсних ненульових чисел, для встановлення властивостей шуканої функції: монотонності, симетричності, періодичності тощо. Зокрема, будемо використовувати важливу властивість дійсного числа: квадрат дійсного числа — невід'ємне дійсне число.

Також до описаних на початку цього розділу методів розв'язування функціональних рівнянь ми долучимо ще й певні ідеї й поради, які можуть допомогти при розв'язуванні задач.

1. Варто спробувати підібрати можливий розв'язок заданого рівняння (наприклад, перевіривши, чи є розв'язки рівняння серед лінійних функцій, многочленів тощо). Підібравши можливий розв'язок $f_0(x)$, можна спробувати

виконати таку заміну $f(x) = f_0(x) + g(x)$, $f(x) = f_0(x) \cdot g(x)$ тощо з новою невідомою функцією $g(x)$. Це часто приводить до нового функціонального рівняння з невідомою функцією $g(x)$, яке є більш простим, ніж вихідне рівняння.

2. Шляхом підстановок конкретних числових значень незалежної змінної слід спробувати відшукати значення функції в певних точках (наприклад, в точках 0, 1, -1 та ін.). Це може наштовхнути на гіпотезу про те, які функції є розв'язками рівняння, та якими властивостями володіє шукана функція.

3. Якщо рівняння включає дві змінні, скажімо x і y, слід спробувати здійснити такі підстановки $x = x(t)$, $y = y(t)$, які приводять до рівняння з однією змінною t, яке є більш простим. Також це можна досягнути, скажімо, виконуючи підстановки для y в термінах x (або навпаки), наприклад, $y = x$, $y = -x$, $y = 0$, $y = f(x)$ тощо.

4. Якщо у функціональному рівнянні в одній частині записано вираз, який є симетричним відносно змінних x та y, а в іншій — ні, то провівши заміну x на y, а y на x можна отримати нове функціональне рівняння, яке, можливо, легше розв'язати.

5. Слід спробувати визначити якомога більше властивостей шуканої функції. Наприклад, чи є вона монотонною, скільки вона може мати коренів, яких значень вона може набувати, як вона себе поводить при прямуванні аргумента до нескінченності тощо.

6. При розв'язуванні функціональних рівнянь зазвичай одержують певні наслідки, із яких роблять висновок про деяку «вузьку» множину функцій, в якій містяться розв'язки заданого рівняння (зазвичай ця множина — це або скінченна множина функцій, або клас функцій певного вигляду). Тому фактично завжди останнім кроком розв'язання є безпосередня перевірка усіх функцій з цієї множини на предмет того, чи є вони розв'язками рівняння.

А тепер перейдемо до розгляду різних функціональних рівнянь та аналізу їхніх розв'язань.

Задача 5.11. *Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівність*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)},$$

для будь-яких дійсних $x \neq 0$ і $x \neq 1$.

Розв'язання. Застосуємо метод підстановок. Припустимо, що така функція існує. Покладемо в умову $x = t$, де $t \neq 0$ і $t \neq 1$, тоді

$$f(t) + f\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{2(1-2t)}{t(1-t)}. \tag{5.5}$$

Як бачимо, одержали два невідомих $f(t)$ і $f\left(\frac{1}{1-t}\right)$. Тому далі покладемо в умову $x=\frac{1}{1-t}$, де $t\neq 0$ і $t\neq 1$. Одержимо

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f\left(\frac{t-1}{t}\right)=\frac{2\left(1-t^2\right)}{t}. \tag{5.6}$$

Знову, одержали нове невідоме $f\left(\frac{t-1}{t}\right)$. Тому, далі покладемо в умову $x=\frac{t-1}{t}$, де $t\neq 0$ і $t\neq 1$. Одержимо

$$f\left(\frac{t-1}{t}\right)+f(t)=\frac{4t-2t^2}{t-1}. \tag{5.7}$$

Як бачимо, нових невідомих не з'явилося. Тому, щоб знайти $f(t)$, додамо рівності (5.5) і (5.7), і від одержаного результату віднімемо (5.6):

$$\begin{aligned}
2f(t)&=\frac{2(1-2t)}{t(1-t)}+\frac{4t-2t^2}{t-1}-\frac{2\left(1-t^2\right)}{t},\\
2f(t)&=\frac{2-4t-4t^2+2t^3-2+2t+2t^2-2t^3}{t(1-t)},\\
2f(t)&=\frac{-2t^2-2t}{t(1-t)},\\
f(t)&=\frac{t+1}{t-1}.
\end{aligned}$$

Таким чином, шукана функція може мати вигляд $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, де $x\neq 0$ і $x\neq 1$. Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція дійсно задовольняє умову:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{\frac{1}{1-x}+1}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2-x}{x}=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}.$$

Відповідь. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, де $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. □

Задача 5.12. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють рівність*

$$f\left(x^2-2xy+y^2\right)=(f(x))^2-2xf(y)+y^2,$$

для будь-яких дійсних x та y.

Розв'язання. Можна легко здогадатися і перевірити, що $f(x)=x$ є розв'язком цього функціонального рівняння. Постає запитання: а чи є якісь інші розв'язки, що приховані у цій рівності? Адже є ще один розв'язок $f(x)=x+1$ цього рівняння. І дійсно, ми можемо легко переконатися, що функція $f(x)=x+1$ є розв'язком:

$$f\left(x^2-2xy+y^2\right)=x^2-2xy+y^2+1$$

і

$$(f(x))^2 - 2xf(y) + y^2 = (x+1)^2 - 2x(y+1) + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 1.$$

Яким же чином можна знайти ці та інші функції, що є розв'язками цього функціонального рівняння? Це допомагають зробити вдало підібрані підстановки замість змінних x та y.

Перепишемо наше функціональне рівняння у такому вигляді:

$$f\left((x-y)^2\right) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2. \tag{5.8}$$

Це функціональне рівняння, яке містить дві змінні. Розв'язком цього рівняння повинна бути функція від однієї змінної. Тому, природньою є ідея перейти до функціонального рівняння з однією змінною.

Нехай $f(x)$ — шукана функція. Для цього в (5.8) покладемо $x = t$ і $y = 0$, де t — довільне дійсне число. Одержимо функціональне рівняння

$$f\left(t^2\right) = (f(t))^2 - 2t \cdot f(0). \tag{5.9}$$

Далі, в (5.8) покладемо $x = 0$ і $y = t$, де t — довільне дійсне число. Одержимо ще одне функціональне рівняння

$$f\left(t^2\right) = (f(0))^2 + t^2. \tag{5.10}$$

Далі, в (5.8) покладемо $x = t$ і $y = t$, де t — довільне дійсне число. Одержимо ще одне функціональне рівняння

$$f(0) = (f(t) - t)^2. \tag{5.11}$$

Зрозуміло, що шукана функція буде розв'язком рівнянь (5.9), (5.10) і (5.11). Якщо в (5.10) покласти $t = 0$, то одержимо правильну числову рівність

$$f(0) = (f(0))^2.$$

Звідки знаходимо, що $f(0) = 0$ або $f(0) = 1$. А тому, потрібно розглянути два випадки.

Нехай $f(0) = 0$, тоді з (5.11) одержуємо, що $f(t) = t$ для всіх дійсних t. Безпосередня перевірка показує, що функція $f(x) = x$ є розв'язком заданого функціонального рівняння.

Нехай $f(0) = 1$, тоді з (5.11) одержуємо, що $(f(t) - t)^2 = 1$, а із (5.9) і (5.10) одержуємо, що $(f(t))^2 = (t+1)^2$. Це означає, що

$$\begin{cases} (f(t))^2 - 2t \cdot f(t) + t^2 = 1, \\ (f(t))^2 = (t+1)^2. \end{cases}$$

Виключаючи із цієї системи рівностей $(f(t))^2$, одержимо, що

$$(t+1)^2 - 2t \cdot f(t) + t^2 = 1,$$

тобто $2t\,(f\,(t)-t-1)=0$. Звідси, коли $t\neq 0$, знаходимо, що $f\,(t)=t+1$. Але остання рівність також має місце і при $t=0$. Тому, $f\,(x)=x+1$ також може бути шуканою функцією. Перевірка, яку ми здійснили на початку розв'язування задачі, показує, що функція $f\,(x)=x+1$ є розв'язком заданого функціонального рівняння.

Відповідь. $f\,(x)=x$, де $x\in\mathbb{R}$; $f\,(x)=x+1$, де $x\in\mathbb{R}$. □

Задача 5.13. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких справджуються такі три умови:*

а) $f\,(-x)=-f\,(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$;

б) $f\,(x+1)=f\,(x)+1$, для всіх $x\in\mathbb{R}$;

в) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}$, для всіх дійсних $x\neq 0$.

Розв'язання. У цій задачі усі значення шуканої функції будемо знаходити поступово, використовуючи задані вимоги до неї.

Припустимо, що така функція існує. Покладемо $x=0$ в умову а), одержимо, $f\,(0)=0$. Далі, покладемо $x=0$ в умову б), одержимо, що $f\,(1)=f\,(0)+1$. Враховуючи знайдене попереднє значення, одержуємо, що $f\,(1)=1$. Далі, використовуючи умову б) і метод математичної індукції, знаходимо, що $f\,(n)=n$ для усіх натуральних n. Далі, умова а) забезпечує виконання рівності $f\,(k)=k$ для усіх цілих чисел k. Дійсно, якщо k — ціле від'ємне число, то $f\,(k)=-f\,(-k)=-(-k)=k$. Отже, $f\,(x)=x$ для будь-якого $x\in\mathbb{Z}$.

Нехай $x\neq 0$ і $x\neq -1$. Тоді вирази $\frac{1}{x}$ і $1+\frac{1}{x}$ мають ненульові значення і за умовами б) і в) одержуємо:

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{f\,(x)}{x^2},$$

тобто

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{f\,(x)}{x^2},\quad \text{де } x\neq 0 \text{ і } x\neq -1. \tag{5.12}$$

Оскільки $1+\frac{1}{x}=\frac{1}{x/(x+1)}$ і вираз $x/(x+1)$ має ненульові значення, то за умовою (в) одержуємо:

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x/(x+1)}\right)=\frac{f\,(x/(x+1)\,)}{(x/(x+1)\,)^2},$$

тобто

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{f\,(x/(x+1)\,)}{(x/(x+1)\,)^2},\quad \text{де } x\neq 0 \text{ і } x\neq -1. \tag{5.13}$$

Далі, враховуючи що $x/(x+1) \ = 1 + \left(-\frac{1}{x+1}\right)$ і вираз $x+1$ має ненульові значення, то за умовами а), б) і в) одержуємо:

$$f\left(x/(x+1)\right) = f\left(1+\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right) = 1 + f\left(-\frac{1}{x+1}\right) =$$
$$= 1 - f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{f(x)+1}{(x+1)^2},$$

тобто

$$f\left(x/x+1\right) = \frac{(x+1)^2 - f(x) - 1}{(x+1)^2}, \quad \text{де } x \neq 0 \text{ і } x \neq -1. \tag{5.14}$$

Підставивши (5.12) і (5.14) в (5.13), одержуємо:

$$1 + \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\frac{(x+1)^2 - f(x) - 1}{(x+1)^2}}{\left(x/(x+1)\right)^2},$$

тобто

$$x^2 + f(x) = x^2 + 2x - f(x), \quad \text{де } x \neq 0 \text{ і } x \neq -1.$$

Розв'язавши останню рівність відносно $f(x)$, знаходимо, що $f(x) = x$ для усіх $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Враховуючи, що $f(x) = x$ для усіх $x \in \mathbb{Z}$, робимо висновок, що $f(x) = x$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція задовольняє усі умови задачі.

Відповідь. $f(x) = x$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. □

Задача 5.14. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — така функція, що задовольняє наступні дві умови:*

а) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, для будь-яких дійсних x та y;

б) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$, для будь-якого дійсного $x \neq 0$.

Доведіть, що $f(x) = \lambda x$ для будь-якого дійсного x, і для деякої дійсної константи λ.

Розв'язання. Покладемо $x = 0$ і $y = 0$ в умову а), одержимо: $f(0) = 0$. Далі, покладемо $x = t$ і $y = -t$, де t — довільне дійсне число, в умову а), одержимо: $f(0) = f(t) + f(-t)$. Враховуючи, що $f(0) = 0$, одержуємо, що $f(-t) = -f(t)$. Таким чином, $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого дійсного x.

Далі, оскільки для $x \neq 0$ і $x \neq 1$ виконується рівність

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)},$$

то, за умовою а) одержуємо:

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x(x-1)}\right).$$

Далі, використовуючи умову б), матимемо:

$$\frac{f(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x(x-1))}{x^2(x-1)^2},$$

звідки

$$x^2 f(x-1) - (x-1)^2 f(x) = f\left(x^2 - x\right).$$

Далі, використовуючи а) і те, що $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого дійсного x, одержимо:

$$x^2 f(x) - x^2 f(1) - (x-1)^2 f(x) = f\left(x^2\right) - f(x),$$

тобто

$$f\left(x^2\right) + x^2 f(1) = 2x f(x). \tag{5.15}$$

Далі в (5.15) покладемо $x = t$ і $x = t + \frac{1}{t}$, де $t \neq 0$ і $t \neq 1$, одержимо:

$$f\left(t^2\right) + t^2 f(1) = 2t f(t)$$

і

$$f\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) + \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) f(1) = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) f\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

Із цих двох останніх рівностей, за допомогою заданих і одержаних властивостей шуканої функції, одержуємо:

$$f(t) = \left(\frac{f(2) + 2f(1)}{4}\right) t,$$

для всіх дійсних $t \neq 0$ і $t \neq 1$.

Таким чином, ми довели, що $f(x) = \left(\frac{f(2)+2f(1)}{4}\right) x$, для будь-яких дійсних $x \neq 0$ і $x \neq 1$. Підставивши в останню рівність $x = 2$, знайдемо, що $f(2) = 2f(1)$. Враховуючи це, матимемо, що $f(x) = f(1)\,x$, для будь-яких дійсних $x \neq 0$ і $x \neq 1$. Ця одержана рівність буде виконуватися і для $x = 0$ і для $x = 1$, бо $f(0) = 0$, що випливає з умови а) при $x = y = 0$, і $f(1) = f(1)$ — також правильна рівність.

Таким чином, $f(x) = \lambda x$, для всіх $x \in \mathbb{R}$, а $\lambda = f(1) = \mathrm{const}$. Безпосередня перевірка показує, що усі такі функції задовольняють усі умови задачі. □

Наведені вище задачі показують, що за допомогою простих підстановок, ми можемо розв'язати низку функціональних рівнянь на $\mathbb{R}$. Ми, поки що, фактично не використовували різноманітні властивості множини $\mathbb{R}$, щоб застосувати їх до розв'язання функціональних рівнянь. Далі ми розглянемо декілька задач, які ілюструють як використовувати структуру множини дійсних чисел для розв'язування функціональних рівнянь.

Задача 5.15. *Нехай* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *така функція, що*
а) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *для усіх дійсних* x *та* y*;*
б) $f(xy)=f(x)f(y)$ *для усіх дійсних* x *та* y*.*
Доведіть, що $f(x)=0$ *для усіх дійсних* x*, або* $f(x)=x$ *для усіх дійсних* x*.*

Розв'язання. Результат задачі означає, що будь-яка дійсна функція, яка визначена на $\mathbb{R}$ і є одночасно адитивною (умова а)) і мультиплікативною (умова б)), буде або тотожний нуль, або тотожне відображення. Доведемо це.

Нехай f — така функція, для якої виконуються усі вимоги задачі. Спочатку покажемо, що $f(rx)=rf(x)$ для кожного раціонального r і будь-якого дійсного x.

Покладемо $x=0$ і $y=0$ в умову а), дістанемо $f(0)=f(0)+f(0)$. Звідки знаходимо, що $f(0)=0$. Далі, покладемо $x=t$ і $y=-t$, де t — довільне дійсне число, в умову а), дістанемо: $f(0)=f(t)+f(-t)$. Звідси знаходимо, що $f(-x)=-f(x)$ для усіх дійсних x. Далі покладемо $x=t$ і $y=t$, де t — довільне дійсне число, в умову а), дістанемо: $f(t+t)=f(t)+f(t)$. Звідки знаходимо, що $f(2x)=2f(x)$ для усіх дійсних x. Далі, індукцією по n, використовуючи умову а), доводимо, що $f(nx)=nf(x)$ для кожного натурального n і будь-якого дійсного x. Дійсно, якщо припустити, що $f(kx)=kf(x)$, де $k\in\mathbb{N}$ і $x\in\mathbb{R}$, то, скориставшись умовою а), одержимо:

$$f((k+1)x)=f(kx+x)=f(kx)+f(x)=kf(x)+f(x)=(k+1)f(x),$$

тобто $f((k+1)x)=(k+1)f(x)$. Тому, за основним принципом математичної індукції, робимо висновок, що $f(nx)=nf(x)$ для кожного натурального n і будь-якого дійсного x. Оскільки $f(-x)=-f(x)$ для будь-якого дійсного x, то $f(-nx)=-f(nx)=-nf(x)$, де $n\in\mathbb{N}$. Тому, $f(mx)=mf(x)$ для кожного цілого m і будь-якого дійсного x.

Далі, розглянемо довільне раціональне число $r=\frac{p}{q}$, де p — ціле, а q — натуральне число. Використовуючи, одержані вище, властивості функції f, матимемо:

$$pf(x)=f(px)=f(qrx)=qf(rx).$$

Звідси знаходимо, що $f(rx)=\frac{p}{q}f(x)$, тобто $f(rx)=rf(x)$ для кожного раціонального r і будь-якого дійсного x. Зокрема, одержуємо: $f(r)=rf(1)=cr$ для усіх раціональних чисел r, де $c=f(1)$ є сталим дійсним числом.

Але ми ще не використовували умову б). Покладемо $x=y=1$ в умову б), одержимо: $f(1)=(f(1))^2$. Звідки $f(1)=0$ або $f(1)=1$. Якщо $f(1)=0$, то поклавши $y=1$ в умову а), ми отримаємо: $f(x)=0$ при всіх дійсних x. Таким чином, ми можемо вважати, що $f(1)=1$. Поклавши $y=x$ в умову б), одержимо: $f\left(x^2\right)=(f(x))^2$ для будь-якого дійсного x. Але ми знаємо, що

$z^2 \geqslant 0$ для усіх дійсних z. Тому, якщо $z \geqslant 0$, то $\sqrt{z}$ — дійсне невід'ємне число і $f(z) = f\left(\left(\sqrt{z}\right)^2\right) = \left(f\left(\sqrt{z}\right)\right)^2 \geqslant 0$. Звідси випливає, що функція f приймає невід'ємні значення для невід'ємних значень аргументів.

Тому розглянемо два дійсних числа a і b, для яких виконується умова $a < b$, тоді $b - a > 0$ і тому $f(b-a) \geqslant 0$. Далі, використовуючи умову а) і одержані попередні властивості шуканої функції, знаходимо, що

$$0 \leqslant f(b-a) = f(b+(-a)) = f(b) + f(-a) = f(b) - f(a),$$

тобто $f(a) \leqslant f(b)$. Таким чином, за допомогою умов а) і б) ми довели, що шукана функція f неспадна на $\mathbb{R}$. Крім цього, ми довели, що $f(r) = rf(1) = r$ для усіх раціональних чисел r. І це нам допоможе розв'язати задачу.

Ми стверджуємо, що $f(x) = x$ для усіх дійсних x. Припустимо, що $f(x) < x$ для деякого дійсного x. Виберемо таке раціональне число r, що $f(x) < r < x$. Тут ми скористалися важливою властивістю числової прямої: між будь-якими двома різними дійсними числами існує раціональне число. Оскільки f — неспадна функція, то $f(r) \leqslant f(x)$, тобто $r \leqslant f(x)$, що суперечить $f(x) < r$. Аналогічно доводиться, що не існує такого дійсного x, для якого $x < f(x)$. Тому, $f(x) = x$ для усіх дійсних x. Перевірка показує, що знайдені обидві функції задовольняють усі умови задачі. □

Ми бачимо, що властивості *структури числової прямої* допомагають у розв'язуванні функціональних рівнянь. Ми використали ***мультиплікативний*** характер шуканої функції до висновку, що шукана функція приймає невід'ємні значення для невід'ємних аргументів. Основою для такого висновку є той факт, що квадрат дійсного числа є невід'ємним. ***Адитивний*** характер шуканої функції призводить до того, що шукана функція буде неспадною. Оскільки будь-яка адитивна функція на $\mathbb{R}$ однозначно визначається для усіх раціональних чисел, то ми навели міркування, які допомогли нам визначити значення шуканої функції для кожного дійсного значення аргументу. Для одержання кінцевого результату, ми скористалися ще однією властивістю структури числової прямої: *між будь-якими двома різними дійсними числами завжди існує раціональне число*. Цей факт відомий під назвою «***щільність множини раціональних чисел*** $\mathbb{Q}$ ***в множині*** $\mathbb{R}$». Ще одна важлива властивість структури числової прямої: для будь-яких двох дійсних чисел x та y виконується один і тільки один зв'язок між ними, а саме: $x < y$, $x = y$ або $x > y$, тобто числова пряма — *впорядкована*. Наступні задачі показують, як ці ідеї можуть бути ефективно використані при розв'язуванні функціональних рівнянь.

Задача 5.16. *Знайти усі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, які задовольняють рівність*

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = (f(x))^2 + y,$$

для усіх $x, y \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай f — така функція, для якої виконуються усі вимоги задачі. Підставимо $x = 0$, $y = t$ в умову і позначивши $f(0) = s$, одержимо:

$$f(f(t)) = s^2 + t, \tag{5.16}$$

для будь-якого дійсного t і деякого фіксованого дійсного s.

Аналогічно, підставимо $x = t$, $y = 0$ в умову, одержимо:

$$f\left(t^2 + s\right) = (f(t))^2, \tag{5.17}$$

для будь-якого дійсного t і того самого фіксованого s.

Підставляючи $t = 0$ в (5.17), одержимо:

$$f(s) = s^2. \tag{5.18}$$

Додавши (5.17) і (5.18), одержимо:

$$s^2 + f\left(t^2 + s\right) = (f(t))^2 + f(s),$$

тобто

$$f\left(s^2 + f\left(t^2 + s\right)\right) = f\left((f(t))^2 + f(s)\right).$$

Використовуючи умову задачі, одержимо:

$$(f(s))^2 + t^2 + s = (f(f(t)))^2 + s.$$

Використовуючи (5.16) і (5.18), одержимо:

$$s^4 + t^2 + s = \left(s^2 + t\right)^2 + s.$$

Звідки слідує, що $2s^2 t = 0$ при усіх дійсних t. Це можливо лише тоді, коли $s = 0$. Тому, шукана функція володіє такими властивостями:

$$f(f(t)) = t, \quad \text{для усіх } t \in \mathbb{R}, \tag{5.19}$$

і

$$f\left(t^2\right) = (f(t))^2, \quad \text{для всіх } t \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Помічаємо, що із (5.20) випливає, що шукана функція приймає невід'ємні значення для невід'ємних значень аргументу. Якщо $f(x) = 0$ для деякого x, то матимемо:

$$f\left(x^2\right) = f\left(x^2 + f(x)\right) = (f(x))^2 + x = x,$$

тобто $x = f\left(x^2\right) = (f(x))^2 = 0$. Тому $f(x) > 0$ при $x > 0$.

Далі, покладемо в умову $x = f(t)$, тоді

$$f\left((f(t))^2 + f(y)\right) = (f(f(t)))^2 + y,$$

тобто, враховуючи (5.19) і (5.20), одержимо:
$$f\left(f\left(t^2\right)+f\left(y\right)\right)=t^2+y.$$
Подіємо на цю рівність функцією f, одержимо:
$$f\left(t^2+y\right)=f\left(f\left(f\left(t^2\right)+f\left(y\right)\right)\right),$$
а враховуючи (5.19), одержимо:
$$f\left(t^2+y\right)=f\left(t^2\right)+f\left(y\right),$$
тобто одержали потрібну нам адитивність:
$$f\left(z+y\right)=f\left(z\right)+f\left(y\right),$$
де $y,z\in\mathbb{R}$ і $z\geqslant 0$. Тепер, за допомогою одержаної адитивності, ми зможемо довести монотонність функції f. Розглянемо два різних дійсних числа x та y, для яких $x>y$, тоді $x-y>0$. Тоді, за допомогою адитивності, одержуємо:
$$f\left(x\right)=f\left(\left(x-y\right)+y\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)>f\left(y\right),$$
бо при $x-y>0$ маємо, що $f\left(x-y\right)>0$. Таким чином, $f\left(x\right)>f\left(y\right)$ при $x>y$, тобто шукана функція f монотонно зростає на $\mathbb{R}$. Отримавши монотонність функції f ми легко доведемо, що $f\left(x\right)=x$ при будь-якому дійсному x.

Справді, нехай існує таке дійсне число x, що $f\left(x\right)>x$. Тоді, подіявши на цю нерівність функцією f, враховуючи її монотонність, одержимо, що $f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(x\right)$, а скориставшись (5.19), одержимо, що $x>f\left(x\right)$, що суперечить припущенню. Аналогічно одержуємо протиріччя, якщо припустити, що існує таке x, для якого $f\left(x\right)<x$. Одержані протиріччя і доводять, що $f\left(x\right)=x$ при будь-якому дійсному x. Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція задовольняє усі вимоги задачі.

Альтернативне розв'язання. З умови одержуємо, що $f\left(f\left(y\right)\right)=y+\left(f\left(0\right)\right)^2$ для будь-якого дійсного y. Припустимо, що існує таке дійсне число y, для якого $f\left(y\right)<y$. Тоді існує таке дійсне число x, що $y-f\left(y\right)=x^2$. Тоді
$$f\left(y\right)=f\left(x^2+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+y.$$
Так як $\left(f\left(x\right)\right)^2\geqslant 0$, то звідси слідує, що $f\left(y\right)\geqslant y$, що суперечить припущенню. Отже,
$$f\left(x\right)\geqslant x,\quad \text{для усіх } x\in\mathbb{R}.$$

Тепер виберемо таке дійсне число z, щоб $z<-\left(f\left(0\right)\right)^2$ і позначимо через $\alpha=f\left(z\right)$, тоді
$$\alpha\leqslant f\left(\alpha\right)=f\left(f\left(z\right)\right)=z+\left(f\left(0\right)\right)^2<0.$$
Це означає, що α і $f\left(\alpha\right)$ обидва від'ємні, причому $\alpha\leqslant f\left(\alpha\right)$. Звідси слідує, що $\left(f\left(\alpha\right)\right)^2\leqslant\alpha^2$. Тоді, для будь-якого дійсного x, матимемо:
$$\alpha^2+x\leqslant\alpha^2+f\left(x\right)\leqslant f\left(\alpha^2+f\left(x\right)\right)=\left(f\left(\alpha\right)\right)^2+x\leqslant\alpha^2+x.$$

Звідси випливає, що у цьому ланцюжку нерівностей повинні скрізь бути знаки рівності, тобто $f(x) = x$ для будь-якого дійсного x. Залишилось виконати перевірку. □

Задача 5.17. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така функція, що задовольняє рівність*
$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$$
для будь-яких дійсних $x \neq y$. Доведіть, що $f(x) = x$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі, ми застосуємо міркування, що допомогли нам розв'язати попередні задачі, але у більш витонченому вигляді.

Розпочнемо з вивчення заданої рівності. Наша функція повинна бути *ін'єктивною* і тому не може бути сталою на будь-якому числовому відрізку, бо інакше права частина вказаної рівності не буде визначеною (знаменник буде дорівнювати нулю).

Покладемо в умову $y = 0$, тоді для усіх дійсних $x \neq 0$ виконується рівність:
$$f(1) = \frac{f(x)+f(0)}{f(x)-f(0)}.$$
Розв'яжемо це рівняння відносно невідомого $f(x)$:
$$(f(x)-f(0)) \cdot f(1) = f(x)+f(0),$$
$$(f(1)-1)f(x) = (f(1)+1)f(0). \tag{5.21}$$
Якщо $f(1) \neq 1$, то з (1) знаходимо:
$$f(x) = \frac{(f(1)+1)f(0)}{f(1)-1},$$
що неможливо, бо у цьому випадку функція f є сталою. Тому, $f(1) = 1$. Тоді із (5.21) одержуємо, що $(f(1)+1)f(0) = 0$. Оскільки $f(1) \neq -1$, то $f(0) = 0$.

Далі, замість y в умову покладемо $x-2$, тоді одержимо:
$$f(x-1) = \frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}. \tag{5.22}$$
Знову, замість x та y в умову покладемо $x-1$ та 1 відповідно, тоді, враховуючи, що $f(1) = 1$, одержимо:
$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1}. \tag{5.23}$$
Із рівностей (5.22) і (5.23), одержуємо рівність:
$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{f(x)}{f(x-2)}. \tag{5.24}$$

А з рівностей (5.23) і (5.24), знаходимо:

$$f(x) = \frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1} f(x-2). \tag{5.25}$$

Тепер, знаючи, що $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$, за допомогою цих рівностей спробуємо знайти значення шуканої функції у наступних натуральних точках. Підставимо $x = 3$ в (5.23), одержимо:

$$f(3) = \frac{f(2)+1}{f(2)-1}.$$

Аналогічно, підставимо $x = 4$ в (5.24), одержимо:

$$f(4) = (f(2))^2,$$

а також, $x = 5$ — в (5.25), матимемо:

$$f(5) = \frac{f(4)+1}{f(4)-1} \cdot f(3) = \frac{(f(2))^2+1}{(f(2))^2-1} \cdot \frac{f(2)+1}{f(2)-1} = \frac{(f(2))^2+1}{(f(2)-1)^2}.$$

Після цього, спробуємо обчислити $f(5)$ за допомогою умови, поклавши у неї $x = 3$ і $y = 2$:

$$f(5) = f\left(\frac{3+2}{3-2}\right) = \frac{f(3)+f(2)}{f(3)-f(2)}.$$

Підставивши значення $f(3)$ у це співвідношення, одержимо:

$$f(5) = \frac{(f(2))^2+1}{1+2f(2)-(f(2))^2}.$$

Порівнюючи це значення із попереднім значенням $f(5)$, одержуємо, що:

$$(f(2)-1)^2 = 1+2f(2)-(f(2))^2.$$

Звідси знаходимо, що $(f(2))^2 = 2f(2)$, тобто $f(2) = 0$ або $f(2) = 2$. Але, так як $f(0) = 0$ і шукана функція є ін'єктивною, то $f(2) = 2$. Тому, за допомогою попередніх обчислень, послідовно знаходимо:

$$f(3) = \frac{f(2)+1}{f(2)-1} = \frac{2+1}{2-1} = 3,$$

$$f(4) = (f(2))^2 = 2^2 = 4,$$

$$f(5) = \frac{f(3)+f(2)}{f(3)-f(2)} = \frac{3+2}{3-2} = 5.$$

Далі міркування здійснюватимемо *індуктивно*. Припустимо, що $f(k) = k$, для усіх натуральних $k \leqslant n$, де n — натуральне число. Тоді, за допомогою (5.25), одержуємо:

$$f(n+1) = \frac{f(n)+1}{f(n)-1} \cdot f(n-1).$$

Оскільки за припущенням $f(n) = n$ і $f(n-1) = n-1$, то це співвідношення дає:

$$f(n+1) = \frac{n+1}{n-1} \cdot (n-1) = n+1,$$

що і завершує індукційний перехід. Таким чином, за основним принципом математичної індукції, ми одержуємо, що $f(n) = n$, для довільного натурального n.

Далі, замість y покладемо в умову xz, одержимо:

$$f\left(\frac{x+xz}{x-xz}\right) = \frac{f(x)+f(xz)}{f(x)-f(xz)}.$$

З іншого боку, $f\left(\frac{x+xz}{x-xz}\right) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ і за умовою задачі матимемо:

$$f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)}.$$

Із цих трьох останніх рівностей, одержуємо:

$$\frac{f(x)+f(xz)}{f(x)-f(xz)} = \frac{1+f(z)}{1-f(z)},$$

тобто

$$f(xz) = f(x)f(z). \tag{5.26}$$

Співвідношення (5.26) одержане за умови, що $x \neq 0$ і $z \neq 1$. Але так як $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$, то співвідношення (5.26) виконується для будь-яких дійсних x і z. Це співвідношення означає, що шукана функція *мультиплікативна*.

Далі, замість y покладемо в умову $-x$, тоді одержимо:

$$f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{f(x)-f(-x)}.$$

Так як $f(0) = 0$, то звідси слідує, що

$$f(-x) = -f(x).$$

Ця рівність одержана за умови, що $x \neq 0$, але враховуючи, що $f(0) = 0$, матимемо, що

$$f(-x) = -f(x) \tag{5.27}$$

для будь-яких дійсних x.

Ця рівність означає, що шукана функція — *непарна*. Оскільки $f(n) = n$ для усіх натуральних n, то використовуючи непарність функції f, одержуємо, що $f(k) = k$ для усіх цілих k. Далі, властивість мультиплікативності функції f дає нам можливість довести, що $f(r) = r$ для усіх раціональних чисел r. Дійсно, розглянемо довільне раціональне число $r = \frac{p}{q}$, де p — ціле, а q — натуральне число. Використовуючи, одержані вище, властивості функції f, матимемо:

$$pf(x) = f(p)f(x) = f(px) = f(qrx) = f(q)f(rx) = qf(rx).$$

Звідси знаходимо, що $f(rx) = \frac{p}{q}f(x)$, тобто $f(rx) = rf(x)$ для кожного раціонального r і будь-якого дійсного x. Зокрема, одержуємо: $f(r) = rf(1) = r$ для усіх раціональних чисел r, бо $f(1) = 1$.

Далі, із мультиплікативності функції f випливає, що $f\left(x^2\right) = (f(x))^2$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Дійсно,

$$f\left(x^2\right) = f(x \cdot x) = f(x) \cdot f(x) = (f(x))^2,$$

тобто функція f приймає невід'ємні значення на проміжку $[0; +\infty)$. Оскільки функція f — ін'єктивне відображення і $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ при $x > 0$. Враховуючи, що має місце (5.27), одержуємо, що $f(x) < 0$ при $x < 0$. Дійсно, якщо $x < 0$, то $-x > 0$, а тоді $f(-x) > 0$, тобто $-f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Далі доведемо монотонність функції f на $\mathbb{R}$. Нехай $x > y$. Розглянемо наступні випадки.

а) Нехай $x > y \geqslant 0$, тоді

$$\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)} = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) > 0,$$

тобто $f(x) - f(y) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(y)$.

б) Нехай $y < 0 < x$, тоді $f(y) < 0$ і $f(x) > 0$, тобто $f(x) > f(y)$.

в) Нехай $y < x < 0$, тоді $0 < -x < -y$ і за результатом пункту а) одержуємо, що $f(-x) < f(-y)$. Враховуючи непарність функції f, одержуємо, що $-f(x) < -f(y)$, тобто $f(x) > f(y)$, що і завершує доведення монотонності функції f.

Далі, використовуючи монотонність функції f та умову про те, що $f(r) = r$ при всіх $r \in \mathbb{Q}$, доводимо, що $f(x) = x$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Дійсно, нехай існує таке дійсне x, що $f(x) > x$, тоді із щільності числової прямої випливає, що існує таке раціональне число r, для якого має місце нерівність $f(x) > r > x$, тоді $f(f(x)) > f(r) > f(x)$, тобто $r > f(x)$, що суперечить умові $f(x) > r > x$. Аналогічно одержуємо протиріччя, якщо припустити про існування такого дійсного числа x, для якого $f(x) < x$. Усі одержані протиріччя і доводять, що $f(x) = x$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. □

Задача 5.18. *Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівність*

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

для усіх дійсних x та y.

Розв'язання. Нехай $f(0) = s$. Покладемо в умову $x = 0$, одержимо:

$$f(f(y)) = s^2 + y, \tag{5.28}$$

для будь-якого дійсного y і деякого дійсного фіксованого s. Доведемо, використовуючи (5.28), що шукана функція f — ін'єктивне відображення. Справді, нехай існують такі дійсні числа x та y, що $x \neq y$ і $f(x) = f(y)$. Тоді $f(f(x)) = f(f(y))$ і за умовою (5.28), одержуємо, що $s^2 + x = s^2 + y$, тобто $x = y$, що суперечить припущенню.

Далі, замість y покладемо в (5.28) число $-s^2$, одержимо: $f\left(f\left(-s^2\right)\right) = 0$, тобто це означає, що існує таке число a, що $f(a) = 0$. Тепер, покладемо в умову $x = a$, тоді одержимо, що

$$f(f(y)) = y, \tag{5.29}$$

для будь-якого дійсного y. Отже, із (5.28) і (5.29) випливає, що $s = 0$, тобто $f(0) = 0$.

Далі, покладемо $y = 0$ в умову, одержимо:

$$f(xf(x)) = (f(x))^2, \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}. \tag{5.30}$$

А тепер, замість x покладемо в (5.30) $f(x)$ і враховуючи (5.29), одержимо:

$$f(f(x)x) = x^2, \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}. \tag{5.31}$$

Із співвідношень (5.30) і (5.31) одержуємо:

$$(f(x))^2 = x^2, \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}. \tag{5.32}$$

Звідси слідує, що $f(x) = \pm x$.

Припустимо, що існують такі $x \neq 0$ і $y \neq 0$, для яких $f(x) = x$ і $f(y) = -y$. Тоді, із умови для цих x і y слідує, що

$$f\left(x^2 - y\right) = x^2 + y.$$

Але, використовуючи (5.32), одержуємо, що

$$\pm\left(x^2 - y\right) = x^2 + y.$$

Із останньої рівності одержимо, що $x = 0$ або $y = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, $f(x) = x$, для всіх $x \in \mathbb{R}$, або $f(x) = -x$, для всіх $x \in \mathbb{R}$. Безпосередня перевірка показує, що знайдені обидві функції є розв'язками заданого функціонального рівняння. □

Задача 5.19. *Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівність*

$$f(f(x) + y) = f\left(x^2 - y\right) + 4f(x)y$$

для будь-яких дійсних x та y.

Розв'язання. Легко перевірити, що $f(x) = 0$, для всіх $x \in \mathbb{R}$, і $f(x) = x^2$, для всіх $x \in \mathbb{R}$, задовольняють усі вимоги задачі. Далі ми доведемо, що це усі шукані функції. Припустимо, що $f(a) \neq a^2$ для деякого дійсного a. Покладемо замість y в умову число $\frac{x^2 - f(x)}{2}$, одержимо:

$$f(x)\left(x^2 - f(x)\right) = 0 \tag{5.33}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(a) \neq a^2$, то із (5.33) слідує, що $f(a) = 0$. Звідси також слідує, що $a \neq 0$, бо коли це не так, то $a^2 = 0 = f(a)$, що суперечить припущенню. Крім того, з (5.33) слідує, що для кожного дійсного x маємо, що або $f(x) = 0$, або $f(x) = x^2$. В обох випадках одержуємо, що $f(0) = 0$. Далі, покладемо в умову $x = 0$, одержимо:

$$f(y) = f(-y) \tag{5.34}$$

для будь-якого $y \in \mathbb{R}$. Далі, покладемо в умову $x = a$, а замість y покладемо $-y$, одержимо:

$$f(f(a) - y) = f\left(a^2 + y\right) - f(a)\,y.$$

Оскільки $f(a) = 0$, то звідси слідує, що

$$f\left(a^2 + y\right) = f(-y).$$

Враховуючи парність функції f, тобто (5.34), одержуємо, що

$$f\left(y + a^2\right) = f(y) \tag{5.35}$$

для всіх $y \in \mathbb{R}$ і деякого дійсного $a \neq 0$. Умова (5.35) означає, що функція f — періодична, з періодом $T = a^2$. Тому, використовуючи періодичність функції f і умову задачі, знаходимо, що

$$f(f(x)) = f\left(f(x) + a^2\right) = f\left(x^2 - a^2\right) + 4f(x)\,a^2,$$

тобто

$$f(f(x)) = f\left(x^2\right) + 4f(x)\,a^2 \tag{5.36}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$ і деякого дійсного $a \neq 0$, що задовольняє умову: $f(a) = 0$. Далі, покладемо в умову задачі $y = 0$, дістанемо:

$$f(f(x)) = f\left(x^2\right), \tag{5.37}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. З (5.36) і (5.37) матимемо, що

$$4f(x)\,a^2 = 0,$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$ і деякого дійсного $a \neq 0$. Звідки $f(x) = 0$, для всіх $x \in \mathbb{R}$. Це означає, що коли існує хоча б одне дійсне $x \neq 0$, для якого $f(x) \neq x^2$, то $f(x) \equiv 0$. На цьому і завершується наше доведення про усі розв'язки запропонованого рівняння. □

Задача 5.20. *Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівність*

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy$$

для будь-яких дійсних x та y.

Розв'язання. Нехай f — шукана функція. Позначимо $f(0) = c$. Покладемо в умову $x = t$, $y = 0$, одержимо:

$$f(f(t)) = f(t) - c + cf(t), \tag{5.38}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Далі, покладемо в умову $x = t$, $y = t$, одержимо:

$$f(c) = (f(t))^2 - t^2, \tag{5.39}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Далі, покладемо в умову $x = 0$, $y = -t$, одержимо:

$$f(f(t)) = c - f(-t) + cf(-t), \tag{5.40}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тому, із (5.38) і (5.40), одержуємо:

$$f(t) - c + cf(t) = c - f(-t) + cf(-t),$$

звідки

$$f(t) + f(-t) + c(f(t) - f(-t)) = 2c, \tag{5.41}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Замінивши в (5.39) t на $-t$, одержимо:

$$f(c) = (f(-t))^2 - t^2, \tag{5.42}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. З рівностей (5.40) і (5.42) одержуємо, що $(f(t))^2 = (f(-t))^2$, тобто для кожного дійсного t маємо: або $f(-t) = f(t)$, або $f(-t) = -f(t)$. Якщо $f(-x_0) = f(x_0)$ для деякого дійсного x_0, то із (5.41) слідує, що $f(x_0) = c$, а із (5.38) слідує, що $f(c) = c^2$. Таким чином,

$$c^2 = f(c) = (f(x_0))^2 - x_0^2 = c^2 - x_0^2,$$

тобто $x_0 = 0$. Це означає, що $f(-x) \neq f(x)$, для всіх дійсних $x \neq 0$. А тому, $f(-x) = -f(x)$, для всіх дійсних $x \neq 0$. Враховуючи цю властивість шуканої функції f, з умови (5.41) одержуємо, що $cf(x) = c$, для всіх дійсних $x \neq 0$. Якщо $c \neq 0$, то $f(x) = 1$, для всіх дійсних $x \neq 1$, що не задовольняє умову. Тому, $c = 0$, тобто $f(0) = 0$.

Далі, умова (5.39) дає, що $(f(x))^2 = x^2$, для всіх $x \in \mathbb{R}$. Звідси для кожного дійсного x маємо: або $f(x) = x$, або $f(x) = -x$. Але умова (5.38) дає, що $f(f(x)) = f(x)$, для всіх $x \in \mathbb{R}$, що заперечує рівність $f(x) = -x$ хоча б для одного дійсного $x \neq 0$. Дійсно, нехай для деякого дійсного $x \neq 0$ виконується рівність: $f(x) = -x$. Тоді, $f(f(x)) = f(-x)$, тобто $f(x) = f(-x)$, що суперечить умові: $f(-x) \neq f(x)$, для всіх дійсних $x \neq 0$, яку ми довели вище. Одержане протиріччя і доводить, що $f(x) = x$, для всіх дійсних x. Безпосередня перевірка показує, що ця функція є розв'язком задачі. □

5.4. Функціональні рівняння для многочленів

В цьому розділі ми розглянемо функціональні рівняння, розв'язки яких слід шукати в класі многочленів.

В цілому усі методи, які використовують при розв'язуванні функціональних рівнянь дійсного аргументу, абсолютно дієві і для розв'язування функціональних рівнянь для многочленів. Проте часто слід використовувати властивості многочленів, про які йшла мова в розділі 3.

Зокрема, в таких рівняннях часто допомагають відомості про те, яким може бути степінь шуканого многочлена. Нехай $\deg(P(x))$ — степінь многочлена $P(x)$. Тоді (див. також теорему 3.2):

$$\deg(P(x)+Q(x)) \leqslant \max\{\deg(P(x)),\deg(Q(x))\};$$
$$\deg(P(x)\cdot Q(x)) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x));$$
$$\deg(P(Q(x))) = \deg(P(x))\cdot\deg(Q(x)).$$

Розглянемо застосування цього на прикладі.

Задача 5.21. *Знайдіть усі многочлени $P(x)$, які задовольняють функціональне рівняння*

$$P(x-1)P(x+1) = P(P(x)).$$

Розв'язання. Позначимо через d степінь многочлена $P(x)$. Тоді в лівій частині заданої рівності записано многочлен степеня $2d$, а в правій — степеня d^2. Тоді $2d = d^2$, звідки $d = 0$ або $d = 2$.

Якщо $d = 0$, то $P(x) = c$ і ми приходимо до рівності $c^2 = c$, звідки $c = 1$ або $c = 0$.

Нехай $d = 2$, тоді $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Маємо:

$$(a(x-1)^2 + b(x-1) + c)(a(x+1)^2 + b(x+1) + c) =$$
$$= a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c.$$

Старший коефіцієнт многочлена зліва дорівнює a^2, а многочлена в правій частині — a^3. Отже, $a^2 = a^3$ і $a = 1$:

$$((x-1)^2+b(x-1)+c)((x+1)^2+b(x+1)+c) = (x^2+bx+c)^2+b(x^2+bx+c)+c.$$

Вільний член многочлена зліва дорівнює $(1-b+c)(1+b+c)$, а многочлена справа — c^2+bc+c. Прирівнюючи одержані вирази знаходимо, що $b^2+bc=2c$. Якщо ж цю тотожність підставити $x=-1$, то одержимо рівність $c(4-2b+c)=$ $=(1-b+c)^2+b(1-b+c)+c$, яка спрощується до $c=1-b+bc$. Таким чином,

$$\begin{cases} b^2+bc=2c, \\ c=1-b+bc. \end{cases}$$

Виключаючи bc дістаємо, що $c=b^2+b-1$, тоді $b^3-3b+2=0$. Розв'язавши рівняння, дістаємо два розв'язки системи: $b=c=1$ і $b=-2$, $c=1$. Отже, розв'язками заданого рівняння можуть бути два многочлени x^2+x+1 та x^2-2x+1. Безпосередньою перевіркою пересвідчуємось, що лише многочлен $P(x)=x^2-2x+1$ задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $P_1(x)=0$, $P_2(x)=1$, $P_3(x)=x^2-2x+1$. □

Дуже дієвий метод при розв'язуванні функціональних рівнянь з многочленами базується на такому твердженні.

Теорема 5.1. *Припустимо, що многочлен $P(x)$ такий, що для всіх значень x виконується рівність $P(x+a)=P(x)$ (де $a\neq 0$ — деяка фіксована константа). Тоді $P(x)=c$ для всіх значень x.*

Справді, припустимо, що $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ — многочлен ненульового степеня, який задовольняє рівняння $P(x+a)=P(x)$. Тоді рівняння n-го степеня $P(x)=P(0)$ має безліч розв'язків: a, $2a$, $3a$, …, що суперечить основній теоремі алгебри многочленів.

В наступних двох задачах розв'язання зводиться до застосування цього твердження.

Задача 5.22. *Знайдіть усі многочлени $P(x)$, які задовольняють функціональне рівняння*

$$(x+1)P(x)=(x-10)P(x+1).$$

(Математична олімпіада Німеччини, 1977 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо, що $P(x)$ ділиться на $x-10$. Дійсно, при $x=10$ із умови знаходимо, що $P(10)=0$. Це і означає, що $P(x)$ ділиться на $x-10$. Тепер доведемо, що $P(x)$ ділиться на x. Дійсно, при $x=-1$ із умови знаходимо, що $P(0)=0$. Це і означає, що $P(x)$ ділиться на x. Оскільки $P(x)$ ділиться на x і на $x-10$, то $P(x)=x(x-10)P_1(x)$, де $P_1(x)$ — деякий многочлен. Оскільки $P(x)=x(x-10)P_1(x)$, то умову задачі можна переписати у вигляді:

$$xP_1(x) = (x-9)P_1(x+1).$$

Міркуючи аналогічно ми одержуємо, що $P_1(x) = (x-1)(x-9)P_2(x)$, де $P_2(x)$ — деякий многочлен. Отже,

$$P(x) = x(x-1)(x-9)(x-10)P_2(x).$$

Продовжуючи діяти аналогічно, ми знайдемо, що

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-10)Q(x),$$

де $Q(x)$ — деякий многочлен, який задовольняє умову $Q(x) = Q(x+1)$. Оскільки ця умова говорить проте, що многочлен $Q(x)$ приймає безліч однакових значень, то многочлен $Q(x)$ є константою.

Таким чином,

$$P(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-10),$$

де a — задане число. Безпосередня перевірка показує, що знайдений многочлен задовольняє усім вимогам задачі. □

Задача 5.23. *Знайти усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких*

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

є сталою величиною для усіх дійсних x.

(Математична олімпіада Канади, 2013 р.)

Розв'язання. Нехай $P(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами, для якого при будь-якому дійсному x

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x) = \lambda, \tag{5.43}$$

де $\lambda = \text{const}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді, при $x = 0$ із (5.43) одержуємо, що $P(-1) + P(0) = \lambda$, а при $x = 1$ із (5.43) одержуємо, що $2 \cdot P(0) = \lambda$. Із одержаних двох рівностей знаходимо, що $P(-1) = P(0) = k$, де $k = \text{const}$, $k \in \mathbb{R}$. Звідси одержуємо, що

$$P(x) = x(x+1) \cdot Q(x) + k, \tag{5.44}$$

де $Q(x)$ — деякий многочлен з цілими коефіцієнтами. Використовуючи (5.44) знаходимо, що

$$P(x-1) = (x-1)x \cdot Q(x-1) + k. \tag{5.45}$$

Таким чином,

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x) =$$
$$= (x+1)\cdot(x-1)x \cdot Q(x-1) + k(x+1) - (x-1)\cdot x(x+1)\cdot Q(x) - k(x-1) =$$

$$= (x-1)\,x\,(x+1)\,(Q\,(x-1) - Q\,(x)) + 2k.$$

Використовуючи (5.43), одержуємо, що

$$(x-1)\,x\,(x+1)\,(Q\,(x-1) - Q\,(x)) = \mathrm{const}\,.$$

А це означає, що для всіх дійсних x виконується рівність:

$$Q\,(x-1) - Q\,(x) = 0,$$

тобто $Q\,(x-1) = Q\,(x)$. Звідки $Q\,(x) = l$, де $l = \mathrm{const}$, $l \in \mathbb{R}$. Таким чином, використовуючи (5.44), знаходимо, що $P\,(x) = lx^2 + lx + k$. Безпосередня перевірка показує, що знайдений квадратний тричлен задовольняє умові задачі.

Відповідь. $P\,(x) = lx^2 + lx + k$, де k і l задані дійсні числа. □

Задача 5.24. *Знайдіть усі многочлени $P\,(x)$ з дійсними коефіцієнтами для яких існує натуральне число n таке, що при всіх дійсних x виконується рівність*

$$P\left(x + \frac{1}{n}\right) + P\left(x - \frac{1}{n}\right) = 2P\,(x)\,.$$

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Румунія, 1979 р.)

Розв'язання. Нехай m — степінь шуканого многочлена

$$P\,(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Використовуючи розклад бінома Ньютона для виразів $\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^m$ і $\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^{m-1}$, задана в умові задачі рівність перепишеться так:

$$2a_m x^m + 2a_{m-1} x^{m-1} + 2a_{m-2} x^{m-2} + a_m \frac{m\,(m-1)}{n^2} x^{m-2} + Q\,(x) =$$
$$= 2a_m x^m + 2a_{m-1} x^{m-1} + 2a_{m-2} x^{m-2} + R\,(x)\,,$$

де $Q\,(x)$ і $R\,(x)$ — многочлени, степінь яких не більший за $m-3$. Оскільки остання рівність, це рівність двох многочленів, то необхідно, щоб коефіцієнт $a_m \frac{m(m-1)}{n^2}$ був рівним нулеві. Оскільки $a_m \neq 0$, то $m\,(m-1) = 0$. Звідки $m = 0$ або $m = 1$. Безпосередня перевірка показує, що многочлени $P\,(x) = ax + b$, де a і b будь-які задані дійсні числа задовольняють усім вимогам задачі. □

Вправи для самостійного розв'язування

Вправа 1. *Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для яких рівність*

$$3f\,(f\,(f\,(n))) + 2f\,(f\,(n)) + f\,(n) = 6n$$

виконується для всіх натуральних n.

Вправа 2. *Знайти усі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, які задовольняють рівність*

$$f(m+n)+f(m)f(n)=f(mn+1)$$

для будь-яких цілих m та n.

Вправа 3. *Знайти усі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, для яких $f(1)=1$ і які задовольняють рівність*

$$f(m+n)(f(m)-f(n))=f(m-n)(f(m)+f(n))$$

для будь-яких цілих m та n.

Вправа 4. *Знайти усі функції $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}^+$, які задовольняють рівність*

$$f(xy)=f(x+y)(f(x)+f(y))$$

для будь-яких додатних раціональних x та y.

(Болгарія, 2014 р.)

Вправа 5. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких $f(0)\in\mathbb{Q}$, і які задовольняють рівність*

$$f(x+(f(y))^2)=(f(x+y))^2$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Іран, 2013 р.)

Вправа 6. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють рівність*

$$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Македонія, 2011 р.)

Вправа 7. *Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняє рівність*

$$f(f(x))+xf(x)=1$$

для всіх дійсних x.

(Філіппіни, 2011 р.)

Вправа 8. *Доведіть, що не існує функції $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, яка задовольняє рівність*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\frac{1}{2012}$$

для всіх додатних дійсних x, y.

(Індонезія, 2012 р.)

Вправа 9. *Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівність*

$$P(x+1)-P(x-1)=6x^2+2$$

для всіх дійсних x.

Вправа 10. *Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких $P(0)=0$ і правильною буде рівність*

$$P(x)=\frac{1}{2}(P(x+1)+P(x-1))$$

для всіх дійсних x.

Розділ 6

Практикум із розв'язування задач з алгебри, що пропонувалися на національних олімпіадах зарубіжних країн

Задача 6.1. *Три додатних дійсних числа a, b, c такі, що*

$$a^2+5b^2+4c^2-4ab-4bc=0.$$

Чи можуть числа a, b, c бути довжинами сторін деякого трикутника.

(Індія, Регіональний тур математичної олімпіади, 2014 р.)

Задача 6.2. *Доведіть, що нерівність*

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

справедлива для будь-яких дійсних чисел a, b, c.

(Німеччина, 2005 р.)

Задача 6.3. *Доведіть, що нерівність*

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

виконується для будь-яких $a,b,c\in(0,1)$.

(Румунія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2002 р.)

Задача 6.4. *Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $abc=2$. Доведіть, що*

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

За якої умови досягається знак рівності?

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2002 р.)

Задача 6.5. *Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $ab+bc+ca=3$. Доведіть, що*

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}}+\frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}}+\frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}}\geqslant 12.$$

(Південна Корея, 2013 р.)

Задача 6.6. *Нехай a, b, c — сторони деякого трикутника, які задовольняють умову $a \geqslant b \geqslant c$. Доведіть, що*

$$\sqrt{a\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}+\sqrt{b\left(a+c-\sqrt{ac}\right)}+\sqrt{c\left(b+c-\sqrt{bc}\right)} \geqslant a+b+c.$$

(Південна Корея, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.7. *Нехай x, y, z — додатні дійсні числа. Доведіть, що*

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geqslant \frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x(y+z)}{z(z+x)}+\frac{y(z+x)}{x(x+y)}.$$

(Молдова, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.8. *Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $abc = 1$. Доведіть, що*

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c}+\frac{(b-1)(a+1)}{1+ca+a}+\frac{(c-1)(b+1)}{1+ab+b} \geqslant 0.$$

(Математична олімпіада для школярів з Бельгії, Нідерландів і Люксембурга, 2013 р.)

Задача 6.9. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, для яких $ab+bc+ca=1$. Доведіть, що*

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{b^2}} \geqslant \sqrt{33}.$$

(Південна Корея, 2010 р.)

Задача 6.10. *Нехай a, b, c — сторони деякого трикутника, α, β, γ — його відповідні кути. Доведіть, що*

$$\frac{a-b}{a\cos\beta-b\cos\alpha}+\frac{b-c}{b\cos\gamma-c\cos\beta}+\frac{c-a}{c\cos\alpha-a\cos\gamma} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 6.11. *Нехай a, b, c — такі дійсні додатні числа, для яких $ab+bc+ca=1$. Доведіть, що*

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \leqslant \frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

Задача 6.12. *Нехай*

$$P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c$$

і

$$Q(x)=x^4+(b-1)x^3+(a-b)x^2-(c+a)x+c,$$

де x — змінна, a, b, c — ненульові дійсні числа, $b>0$. Відомо, що $P(x)$ має три різні дійсні корені x_0, x_1, x_2, які є коренями $Q(x)$.

а) Доведіть, що $abc>28$.

б) Якщо a, b, c — цілі числа і $b > 0$, знайдіть усі їх можливі значення.

(Математична олімпіада Греції, 2015 р.)

Задача 6.13. *Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени степеня 10 з цілими коефіцієнтами. Відомо, що $P(2) < Q(2)$ і*

$$P(x)\cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{10}\left(C_{k+11}^{k}x^{20-k} - C_{21-k}^{11}x^{k-1} + C_{21}^{11}x^{k-1}\right)$$

для всіх ненульових дійсних x. Знайдіть $P(2)$.

(Online Math Open, 2014 р.)

Задача 6.14. *Знайти суму усіх натуральних k, $1 \leqslant k \leqslant 100$, для яких існують такі натуральні a і b, що многочлен $x^{100} - ax^k + b$ можна розкласти на множники $\left(x^2 - 2x + 1\right)P(x)$, де $P(x)$ — деякий многочлен з цілими коефіцієнтами.*

(Інтернет олімпіада NIMO, 2015 р.)

Задача 6.15. *Нехай a — натуральне число, яке не є квадратом цілого числа, а r — дійсний корінь многочлена $P(x) = x^3 - 2ax + 1$. Доведіть, що $r + \sqrt{a}$ — ірраціональне число.*

(Китайська математична олімпіада для дівчат, 2014 р.)

Задача 6.16. *Нехай a, b, c, d, e, f — дійсні числа. Розглянемо два многочлени*

$$P(x) = 2x^4 - 26x^3 + ax^2 + bx + c,$$
$$Q(x) = 5x^4 - 80x^3 + dx^2 + ex + f.$$

Позначимо через S множину усіх чисел (навіть комплексних), кожне із яких є коренем $P(x)$ або $Q(x)$ (чи обох). Відомо, що для даних многочленів $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Знайдіть $P(6)\cdot Q(6)$.

(Інтернет олімпіада NIMO, 2015 р.)

Задача 6.17. *Нехай $P(x)$ — многочлен степеня $m \leqslant 10$ з цілими коефіцієнтами. Відомо, що $P(0) = 0$, $P(x)$ має m різних цілих коренів і многочлен $P(x) + 1$ можна подати у вигляді добутку двох несталих многочленів з цілими коефіцієнтами. Знайти суму усіх можливих значень $P(2)$.*

(Інтернет олімпіада NIMO, 2014 р.)

Задача 6.18. *Знайдіть усі зведені многочлени $P(x)$ другого степеня з цілими коефіцієнтами, для кожного із яких існує многочлен $Q(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $P(x)\cdot Q(x)$ — многочлен, усі коефіцієнти якого дорівнюють ± 1.*

(Польща, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2006 р.)

Задача 6.19. *Знайдіть всі пари зведених многочленів $p(x)$ і $q(x)$ степеня n, $n \geqslant 1$, кожний, які мають по n коренів, що є невід'ємними цілими числами, для яких виконується рівність $p(x) - q(x) = 1$ для кожного дійсного x.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Центральної Америки, 2013 р.)

Задача 6.20. *Послідовність многочленів $(P_n(x))$ визначається наступним чином: $P_0(x) = x$ і $P_n(x) = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1)$, $n \geqslant 1$. Знайти найбільше k таке, що $P_{2014}(x)$ ділиться на x^k.*

(Математична олімпіада Бразилії, 2014 р.)

Задача 6.21. *Знайдіть кількість впорядкованих пар $(P(x), Q(x))$ многочленів з цілими коефіцієнтами, для яких виконується тотожність*

$$P(x)^2 + Q(x)^2 = \left(x^{4096} - 1\right)^2.$$

(Online Math Open, 2015 р.)

Задача 6.22. *Нехай p і q — прості числа. Послідовність (x_n) визначається наступним чином: $x_1 = 1$, $x_2 = p$ і $x_{n+1} = px_n - qx_{n-1}$ для всіх натуральних $n \geqslant 2$. Відомо, що для деякого натурального k виконується рівність $x_{3k} = -3$. Знайдіть p і q.*

(Аргентина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2010 р.)

Задача 6.23. *Послідовність (a_n) визначається наступним чином:*

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2m \cdot a_{m-1} + 1}$$

для всіх натуральних $m > 1$. Знайдіть значення суми $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, для кожного значення $k > 1$.

(Боснія і Герцеговина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2014 р.)

Задача 6.24. *Послідовність натуральних чисел (a_n) визначається наступним чином: $a_0 = a$ — натуральне число і $a_n = 5a_n + 4$, для всіх натуральних $n \geqslant 1$. Чи можна вибрати число a таким, що a_{54} кратне 2013?*

(Міжнародна математична олімпіада країн Балтії, 2013 р.)

Задача 6.25. *Послідовність (a_n) дійсних чисел визначається наступним чином: $a_1 = 1$ і $a_{n+1} = \left(1 + \frac{k}{n}\right)a_n + 1$, для всіх натуральних n. Знайдіть усі натуральні k такі, що для кожного із них число a_n буде цілим числом, при будь-якому натуральному n.*

(Математична олімпіада Північного Китаю, 2013 р.)

Задача 6.26. *Послідовність (a_n) дійсних чисел визначається наступним чином: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ і для всіх натуральних n виконується рівність*

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+1}a_{n-1}.$$

Обчисліть значення виразу

$$\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}-\frac{a_4}{a_5}+\ldots+\frac{a_{2013}}{a_{2014}}-\frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$$

(Міжнародна математична олімпіада країн Центральної Америки, 2015 р.)

Задача 6.27. *За даним натуральним числом a_0 будується послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ наступним чином: $a_{n+1}=a_n^2-5$, якщо a_n — непарне число, і $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$, якщо a_n — парне число. Доведіть, що при непарному $a_0>5$ виконується нерівність $a_{3n}\geqslant n$, для всіх натуральних n.*

(Математична олімпіада Росії, 2000 р.)

Задача 6.28. *Знайдіть усі послідовності (a_n) натуральних чисел, які для будь-якого натурального n задовольняють подвійну нерівність*

$$(n-1)^2<a_n\cdot a_{a_n}<n^2+n$$

(Математична олімпіада Канади, 2015 р.)

Задача 6.29. *Знайти усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для кожного із яких виконується рівність*

$$\left(x^2-6x+8\right)\cdot P(x)=\left(x^2+2x\right)\cdot P(x-2)$$

для будь-якого $x\in\mathbb{R}$.

(Математична олімпіада Греції, 2014 р.)

Задача 6.30. *Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють наступні умови: $P(2015)=2025$ і $P(x)-10=\sqrt{P(x^2+3)-13}$ для кожного $x\geqslant 0$.*

(Молдова, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2015 р.)

Задача 6.31. *Знайти усі такі функції $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ і $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, що f — монотонно зростає і обидві задовольняють такі співвідношення:*

$$f(f(x)+2g(x)+3f(y))=g(x)+2f(x)+3g(y)$$

і

$$g(f(x)+y+g(y))=2x-g(x)+f(y)+y$$

для будь-яких додатних дійсних чисел x та y.

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.32. *Нехай n — натуральне число, $n>1$. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f(x-f(y))=f(x+y^n)+f(f(y)+y^n)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Китай, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2011 р.)

Задача 6.33. *Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f(x)^2+y$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Математична олімпіада Балканських країн, 2000 р.)

Задача 6.34. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf\left(x\right)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Іран, 1999 р.)

Задача 6.35. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f\left(x+xy+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f\left(y\right)+\frac{1}{2}\right)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Аргентина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2010 р.)

Задача 6.36. *Знайдіть усі сюр'єктивні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f\left(x+f\left(x\right)+2f\left(y\right)\right)=f\left(2x\right)+f\left(2y\right)$$

для будь-яких дійсних x і y.

(Іран, 2011 р.)

Задача 6.37. *Функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задовольняє такі умови: $|f\left(x\right)|\leqslant 1$ і*

$$f\left(x\right)+f\left(x+\frac{5}{6}\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

для кожного дійсного числа x. Доведіть, що f є періодичною функцією.

(Польща, 2012 р.)

Задача 6.38. *Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких:*

$$f\left(x+f\left(y\right)\right)-f\left(x\right)=\left(x+f\left(y\right)\right)^4-x^4$$

для будь-яких дійсних x і y.

(Міжнародна математична олімпіада Чехії, Польщі і Словаччини, 2012 р.)

Задача 6.39. *Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що для будь-яких $x\in\mathbb{R}$ і $y\in\mathbb{R}$ виконується рівність*

$$f\left(x+2^y\right)=f\left(x\right)+2^{f(y)}.$$

(Україна, фінал Турніру юних математиків, 2013 р.)

Задача 6.40. *Нехай* $\mathbb{R}_{\neq 0}$ — *множина усіх дійсних чисел, відмінних від* 0. *Знайти усі такі функції* $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}_{\neq 0}$, *що для-будь-яких* $x, y \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ *і* $y \neq -x^2$ *виконується рівність*

$$f\left(x^2 + y\right) = f(x)^2 + \frac{f(xy)}{f(x)}.$$

(Болгарія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2005 р.)

Розв'язання задач

Задача 6.1. *Три додатних дійсних числа a, b, c такі, що*

$$a^2+5b^2+4c^2-4ab-4bc=0.$$

Чи можуть числа a, b, c бути довжинами сторін деякого трикутника?

(Індія, Регіональний тур математичної олімпіади, 2014 р.)

Розв'язання. Припустимо, що додатні дійсні числа a, b, c, для яких виконується рівність $a^2+5b^2+4c^2-4ab-4bc=0$, можуть бути довжинами сторін деякого трикутника. Тоді для них повинна виконуватися така нерівність $a < b+c$ (її називають нерівністю трикутника). За умовою задачі, виконується рівність:

$$a^2+5b^2+4c^2-4ab-4bc=0,$$

яка рівносильна рівності $(a-2b)^2+(b-2c)^2=0$. Оскільки $a-2b$ і $b-2c$ — дійсні числа, то їх квадрати невід'ємні. Отже, із останньої рівності випливає, що $a-2b=0$ і $b-2c=0$, тобто $a=2b=4c$.

Таким чином, $a=4c>3c=c+2c=c+b$, що суперечить нерівності трикутника. Одержане протиріччя і доводить, що не існує трикутника з довжинами сторін a, b, c.

Відповідь. Ні, не можуть. □

Задача 6.2. *Доведіть, що нерівність*

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

справедлива для будь-яких дійсних чисел a, b, c.

(Німеччина, 2005 р.)

Розв'язання. *1-й спосіб.* Використовуючи нерівність $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$ (її можна легко довести звичайним піднесенням обох частин до квадрату), одержуємо:

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{|a|+|1-b|}{\sqrt{2}}+\frac{|b|+|1-c|}{\sqrt{2}}+\frac{|c|+|1-a|}{\sqrt{2}}.$$

Далі потрібно скористатися такою нерівністю: $|x|+|1-x|\geqslant 1$ для будь-якого дійсного x (вона легко доводиться за допомогою відомої властивості модуля: $|x|+|y|\geqslant|x+y|$):

$$\frac{|a|+|1-b|}{\sqrt{2}}+\frac{|b|+|1-c|}{\sqrt{2}}+\frac{|c|+|1-a|}{\sqrt{2}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2-й спосіб. Застосуємо нерівність Мінковського. Маємо:

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2}. \quad (1)$$

Далі, позначимо $a+b+c=x$, тоді

$$(a+b+c)^2+(3-a+b+c)^2 = x^2+(3-x)^2 = 2x^2-6x+9 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2} \geqslant \frac{9}{2}.$$

Тому

$$\sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2} \geqslant \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Із нерівностей (1) і (2) випливає потрібна нерівність.

□

Задача 6.3. *Доведіть, що нерівність*

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$

виконується для будь-яких $a, b, c \in (0,1)$.

(Румунія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2002 р.)

Розв'язання. *1-й спосіб.* Використовуючи властивості степеневої функції, матимемо, що $x^{1/2} < x^{1/3}$ для кожного $x \in (0,1)$. Тоді,

$$\sqrt{abc} < \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

(тут ми скористалися нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел). Тому

$$\sqrt{abc} < \frac{a+b+c}{3}. \quad (6.1)$$

Оскільки $a, b, c \in (0,1)$, то числа $1-a$, $1-b$, $1-c$ також належать інтервалу $(0,1)$. Тому, аналогічно, матимемо:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} = 1-\frac{a+b+c}{3},$$

тобто

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1-\frac{a+b+c}{3}. \quad (6.2)$$

Додавши нерівності (6.1) і (6.2), одержимо нерівність, яку потрібно було довести.

2-й спосіб. Скористаємося нерівністю Коші–Буняковського–Шварца:
$$x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$
де x_1, x_2, y_1, y_2 — довільні дійсні числа. Тому, враховуючи, що $\sqrt{a} < 1$ і $\sqrt{1-a} < 1$, матимемо:
$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)} =$$
$$= \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} + \sqrt{1-b} \cdot \sqrt{1-c} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left(\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{1-b}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{1-c}\right)^2} = 1 \cdot 1 = 1,$$
що і треба було довести.

3-й спосіб. Оскільки $a, b, c \in (0, 1)$, то існують такі числа $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, що $a = \sin^2\alpha$, $b = \sin^2\beta$ і $c = \sin^2\gamma$. Тоді нерівність, яку потрібно довести, перепишеться так:
$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma < 1.$$
Оскільки $0 < \sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma < 1$ і $0 < \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma < 1$, то
$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma < \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta \cos\gamma = \cos(\beta - \gamma) \leqslant 1,$$
що і треба було довести. □

Задача 6.4. *Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $abc = 2$. Доведіть, що*
$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$
За якої умови досягається знак рівності?

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2002 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо такі дві нерівності:
$$(a+b+c)^2 \leqslant 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \tag{6.3}$$
і
$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \leqslant (a+b+c)\left(a^3 + b^3 + c^3\right). \tag{6.4}$$
Дійсно, скористаємося нерівністю Коші–Буняковського–Шварца:
$$(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)^2 \leqslant \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right),$$
де x_1, x_2, x_3 і y_1, y_2, y_3 — два набори дійсних чисел.

Маємо:
$$(a+b+c)^2 = (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 &= \left(\sqrt{a}\cdot a\sqrt{a}+\sqrt{b}\cdot b\sqrt{b}+\sqrt{c}\cdot c\sqrt{c}\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant \left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(a\sqrt{a}\right)^2+\left(b\sqrt{b}\right)^2+\left(c\sqrt{c}\right)^2\right)= \\ &= (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right).\end{aligned}$$

Далі, використовуючи (6.3) і (6.4), одержуємо:

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &\geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a+b+c}=\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(a+b+c)^2}\geqslant \\ &\geqslant \frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}.\end{aligned}$$

Далі, використовуючи нерівність Коші–Буняковського–Шварца, одержуємо:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3} &= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)((a+b)+(b+c)(c+a))}{6}\geqslant \\ &\geqslant \frac{\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2}{6}.\end{aligned}$$

Таким чином, ми довели таку нерівність:

$$a^3+b^3+c^3\geqslant \frac{\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2}{6}. \tag{6.5}$$

Далі, використовуючи нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним, одержуємо:

$$\begin{aligned}a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} &\geqslant 3\sqrt[3]{a\sqrt{b+c}\cdot b\sqrt{c+a}\cdot a\sqrt{a+b}}= \\ &= 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{abc\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}}= \\ &= 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}}=3\sqrt[3]{2\sqrt{8\cdot 2}}=3\sqrt[3]{8}=6,\end{aligned}$$

тобто

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\geqslant 6. \tag{6.6}$$

Використовуючи (6.5) і (6.6), одержуємо:

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &\geqslant \frac{\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2}{6}\geqslant \\ &\geqslant \frac{6\cdot\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)}{6}=a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b},\end{aligned}$$

тобто

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b},$$

що і треба було довести.

Знак рівності досягатиметься тоді і тільки тоді, коли $a=b=c=\sqrt[3]{2}$.

2-й спосіб. За нерівністю Коші–Буняковського–Шварца, одержуємо:

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)((b+c)+(c+a)+(a+b))} =$$
$$= \sqrt{2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}.$$

Оскільки $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \leqslant 3\left(a^3+b^3+c^3\right)$, то

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{6(a^3+b^3+c^3)}. \qquad (6.7)$$

За нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним, одержуємо:

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3}=3abc=6,$$

тобто

$$6 \leqslant a^3+b^3+c^3. \qquad (6.8)$$

Із (6.7) і (6.8), одержуємо:

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{6(a^3+b^3+c^3)} \leqslant a^3+b^3+c^3,$$

що і треба було довести. □

Задача 6.5. *Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $ab+bc+ca=3$. Доведіть, що*

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}}+\frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}}+\frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}} \geqslant 12.$$

(Південна Корея, 2013 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо таку допоміжну нерівність:

$$\frac{(x+y)^3}{\sqrt[3]{2(x+y)(x^2+y^2)}} \geqslant 4xy,$$

де $x>0$ і $y>0$. Дійсно, ця нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$(x+y)^9 \geqslant 128x^3y^3(x+y)\left(x^2+y^2\right),$$
$$(x+y)^8 \geqslant 128x^3y^3\left(x^2+y^2\right).$$

Нехай $x^2+y^2=2\cdot t^4\cdot xy$, де $t\geqslant 1$, тоді $(x+y)^2=2\left(t^4+1\right)xy$. Тому, остання нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$2^4\cdot\left(t^4+1\right)^4\cdot x^4y^4 \geqslant 128\cdot x^3y^3\cdot 2\cdot t^4\cdot xy,$$

$$\left(t^4+1\right)^4 \geqslant 16t^4,$$
$$t^4+1 \geqslant 2t,$$
$$t^4-2t+1 \geqslant 0,$$
$$(t-1)\left(t^3+t^2+t-1\right) \geqslant 0.$$

Остання нерівність є правильною, бо $t \geqslant 1$. Отже, допоміжну нерівність доведено. Далі, використовуючи допоміжну нерівність, одержимо:

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}}+\frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}}+\frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}} \geqslant$$
$$\geqslant 4ab+4bc+4ca = 4(ab+bc+ca) = 4\cdot 3 = 12,$$

що і треба було довести. □

Задача 6.6. *Нехай a, b, c — сторони деякого трикутника, які задовольняють умову $a \geqslant b \geqslant c$. Доведіть, що*

$$\sqrt{a\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}+\sqrt{b\left(a+c-\sqrt{ac}\right)}+\sqrt{c\left(b+c-\sqrt{bc}\right)} \geqslant a+b+c.$$

(Корея, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв’язання. *1-й спосіб.* Позначимо $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, де x, y, z — невід’ємні дійсні числа. Оскільки $a \geqslant b \geqslant c$, то $x \geqslant y \geqslant z > 0$. Нам треба довести наступну нерівність:

$$x\sqrt{x^2-xy+y^2}+y\sqrt{x^2-xz+z^2}+z\sqrt{y^2-yz+z^2} \geqslant x^2+y^2+z^2.$$

Якщо $x = y = z$, то ця нерівність тривіальна. А тому, далі будемо вважати, що $x > z > 0$. Щоб довести цю нерівність, зафіксуємо числа x і z, та розглянемо функцію

$$f(y) = x\sqrt{x^2-xy+y^2}+y\sqrt{x^2-xz+z^2}+z\sqrt{y^2-yz+z^2}-x^2-y^2-z^2$$

на проміжку $[z; x]$. Доведемо, що $f(y) > 0$ при усіх $y \in [z; x]$. Для цього, спочатку доведемо, що вона буде опуклою догори. Знаходимо її другу похідну:

$$f''(y) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-xy+y^2}}\right)^3+\frac{3}{4}\left(\frac{z}{\sqrt{y^2-yz+z^2}}\right)^3-2.$$

Оскільки $x \geqslant y \geqslant z > 0$, то

$$x^2-xy+y^2 = \left(y-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2$$

і

$$y^2-yz+z^2 = y(y-z)+z^2 \geqslant z^2.$$

Тому

$$f''(y) \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{3/4}\,x}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{z}{z}\right)^3 - 2 = \sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4} - 2 < 0.$$

Це означає, що функція $f(y)$ — опукла догори. А тому, функція $f(y)$ буде досягати свого найменшого значення при $y = x$ або при $y = z$, тобто

$$f(y) \geqslant \min\{f(x), f(z)\}.$$

Але

$$f(x) = (x+z)\sqrt{x^2 - xy + y^2} - \left(x^2 + y^2\right) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(x+y)\left(x^3 + y^3\right) \geqslant \left(x^2 + y^2\right)^2.$$

Ця остання нерівність буде правильною, бо її справедливість випливає із нерівності Коші–Буняковського–Шварца. Тому, $f(x) \geqslant 0$. Аналогічно доводиться, що $f(z) \geqslant 0$. Таким чином, $f(y) \geqslant 0$, при усіх $y \in [z; x]$, що і треба було довести. Рівність у нашій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $y = x$ і $z = 0$ або $y = z$ і $x = 0$, що суперечить умові $x > z > 0$. Це означає, що при $x > z > 0$ виконується строга нерівність: $f(y) > 0$ при усіх $y \in [z; x]$. Таким чином,

$$x\sqrt{x^2 - xy + y^2} + y\sqrt{x^2 - xz + z^2} + z\sqrt{y^2 - yz + z^2} \geqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $x = y = z$. Тому,

$$\sqrt{a\left(a + b - \sqrt{ab}\right)} + \sqrt{b\left(a + c - \sqrt{ac}\right)} + \sqrt{c\left(b + c - \sqrt{bc}\right)} \geqslant a + b + c,$$

причому рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a = b = c$, тобто для рівностороннього трикутника.

2-й спосіб. Для доведення запропонованої нерівності, застосуємо трансферну нерівність. Розглянемо два впорядкованих набори чисел:

$$\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right) \quad \text{і} \quad \left(\sqrt{a - \sqrt{ab} + b}, \sqrt{a - \sqrt{ac} + c}, \sqrt{b - \sqrt{bc} + c}\right)$$

Доведемо, що ці обидва набори чисел будуть однаково впорядкованими. Оскільки $a \geqslant b \geqslant c > 0$, то $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b} \geqslant \sqrt{c} > 0$. Далі потрібно довести, що

$$a - \sqrt{ab} + b \geqslant a - \sqrt{ac} + c \geqslant b - \sqrt{bc} + c > 0.$$

Дійсно, $a - \sqrt{ab} + b \geqslant a - \sqrt{ac} + c$, тому $b - c \geqslant \sqrt{a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)$, тобто потрібно довести, що

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}\right) \geqslant 0.$$

Оскільки $a \geqslant b \geqslant c > 0$, то $\sqrt{b}-\sqrt{c} \geqslant 0$. Залишилося довести, $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a} > 0$. Зробимо це методом від супротивного. Припустимо, що існують такі числа $a \geqslant b \geqslant c > 0$, що $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a} \leqslant 0$. Тоді, $\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant \sqrt{a}$, тобто

$$b+c < b+2\sqrt{bc}+c \leqslant a,$$

що суперечить нерівності трикутника. Одержане протиріччя і доводить, що $a-\sqrt{ab}+b \geqslant a-\sqrt{ac}+c$. Далі, залишилося довести, що $a-\sqrt{ac}+c \geqslant b-\sqrt{bc}+c$, тобто $a-b \geqslant \sqrt{c}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$. Але ця нерівність рівносильна такій нерівності:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right) \geqslant 0.$$

Оскільки $a \geqslant b \geqslant c > 0$, тоді мають місце нерівності: $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geqslant 0$ і $\sqrt{b}-\sqrt{c} \geqslant 0$, а також $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c} \geqslant \sqrt{a} > 0$. Таким чином, $a-\sqrt{ab}+b \geqslant a-\sqrt{ac}+c > 0$.

А тепер, використовуючи трансферну нерівність, одержуємо, що

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{a}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}$$

і

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{a}\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}.$$

Додавши ці дві нерівності, одержуємо:

$$2\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+$$
$$+\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c}.$$

Далі, доведемо таку допоміжну нерівність: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\sqrt{x-\sqrt{xy}+y} \geqslant x+y$ при $x > 0$ і $y > 0$. Справді, за нерівністю Коші–Буняковського–Шварца, маємо:

$$u^2+v^2 = \sqrt{u}\cdot u\sqrt{u}+\sqrt{v}\cdot v\sqrt{v} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left(\sqrt{u}\right)^2+\left(\sqrt{v}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(u\sqrt{u}\right)^2+\left(v\sqrt{v}\right)^2} = \sqrt{u+v}\cdot\sqrt{u^3+v^3},$$

тобто

$$\sqrt{u+v}\cdot\sqrt{u^3+v^3} \geqslant u^2+v^2, \tag{6.9}$$

при $u>0$ і $v>0$. Тому,

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\sqrt{x-\sqrt{xy}+y}=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3}\overset{(6.9)}{\geqslant}$$
$$\geqslant\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2=x+y,$$

що і треба було довести. Застосовуючи доведену нерівність, одержимо:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+$$
$$+\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c}\geqslant$$
$$\geqslant(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c),$$

тобто

$$2\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ab}+b}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{a-\sqrt{ac}+c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{b-\sqrt{bc}+c}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2(a+b+c).$$

Звідки

$$\sqrt{a\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}+\sqrt{b\left(a+c-\sqrt{ac}\right)}+\sqrt{c\left(b+c-\sqrt{bc}\right)}\geqslant a+b+c,$$

що і треба було довести. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a=b=c$, тобто коли трикутник — рівносторонній.

3-й спосіб. Запропонована нерівність буде справедливою для будь-яких трьох додатних дійсних чисел, які задовольняють нерівності: $a\geqslant b\geqslant c>0$.

Дійсно, позначимо $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$ і $z=\sqrt{c}$, тоді $x\geqslant y\geqslant z>0$ і запропонована нерівність перепишеться так:

$$x\sqrt{x^2-xy+y^2}+y\sqrt{x^2-xz+z^2}+z\sqrt{y^2-yz+z^2}\geqslant x^2+y^2+z^2.$$

Для додатних u і v, за допомогою нерівності Коші–Буняковського–Шварца, одержуємо:

$$\sqrt{u^2-uv+v^2}=\frac{\sqrt{(u+v)(u^3+v^3)}}{u+v}\geqslant\frac{u^2+v^2}{u+v}.$$

Тому

$$x\sqrt{x^2-xy+y^2}+y\sqrt{x^2-xz+z^2}+z\sqrt{y^2-yz+z^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{x+y}+\frac{y\left(x^2+z^2\right)}{x+z}+\frac{z\left(y^2+z^2\right)}{y+z}.$$

Залишилося довести, що

$$\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{x+y}+\frac{y\left(x^2+z^2\right)}{x+z}+\frac{z\left(y^2+z^2\right)}{y+z}\geqslant x^2+y^2+z^2.$$

Ця нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{x+y}+\frac{y\left(x^2+z^2\right)}{x+z}+\frac{z\left(y^2+z^2\right)}{y+z}-x^2-y^2-z^2\geqslant 0,$$

$$\frac{x^3}{x+y}+\frac{xy^2}{x+y}+\frac{yz^2}{x+z}+\frac{yx^2}{x+z}+\frac{y^2z}{y+z}+\frac{z^3}{y+z}-x^2-y^2-z^2\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{x^3}{x+y}-x^2\right)+\frac{xy^2}{x+y}+\frac{yz^2}{x+z}+\frac{x^2y}{x+z}+\frac{y^2z}{y+z}+\left(\frac{z^3}{y+z}-z^2\right)-y^2\geqslant 0,$$

$$\frac{xy^2}{x+y}+\frac{yz^2}{x+z}+\frac{x^2y}{x+z}+\frac{y^2z}{y+z}-\frac{x^2y}{x+y}-\frac{yz^2}{y+z}-y^2\cdot\frac{x+z}{x+z}\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{x^2y}{x+z}-\frac{x^2y}{x+y}\right)+\left(\frac{xy^2}{x+y}-\frac{xy^2}{x+z}\right)+\left(\frac{y^2z}{y+z}-\frac{y^2z}{x+z}\right)+\left(\frac{yz^2}{x+z}-\frac{yz^2}{y+z}\right)\geqslant 0,$$

$$x^2y\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+y}\right)+xy^2\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+z}\right)+$$
$$+y^2z\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{x+z}\right)+yz^2\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{y+z}\right)\geqslant 0,$$

$$xy(x-y)\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+y}\right)+yz(y-z)\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{x+z}\right)\geqslant 0,$$

$$\frac{xy(x-y)(y-z)}{(x+y)(x+z)}+\frac{yz(x-y)(y-z)}{(x+y)(y+z)}\geqslant 0.$$

Остання нерівність, очевидно, є правильною, бо $x\geqslant y\geqslant z>0$. Це і завершує розв'язання задачі. □

Задача 6.7. *Нехай x, y, z — додатні дійсні числа. Доведіть, що*

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant\frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x(y+z)}{z(z+x)}+\frac{y(z+x)}{x(x+y)}.$$

(Молдова, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. *1-й спосіб.* Скористаємося тотожністю:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=$$
$$=\frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x(y+z)}{z(z+x)}+\frac{y(z+x)}{x(x+y)}+\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}-3.$$

Дійсно,

$$\frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x+y}{y+z}=\frac{x+y}{y+z}\left(\frac{z}{y}+1\right)=\frac{x+y}{y+z}\cdot\frac{y+z}{y}=\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+1,$$

тобто

$$\frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x+y}{y+z}=\frac{x}{y}+1.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{x(y+z)}{z(z+x)}+\frac{y+z}{z+x}=\frac{y}{z}+1$$

і

$$\frac{y(z+x)}{x(x+y)}+\frac{z+x}{x+y}=\frac{z}{x}+1.$$

Додавши три останні рівності і віднявши 3 від обох частин одержаного результату, одержимо потрібну тотожність. Далі, за нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел, одержуємо:

$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x+y}{y+z}\cdot\frac{y+z}{z+x}\cdot\frac{z+x}{x+y}}=3,$$

тобто

$$\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}-3\geqslant 0.$$

Тоді із тотожності випливає, що

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant\frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x(y+z)}{z(z+x)}+\frac{y(z+x)}{x(x+y)},$$

що і треба було довести. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $x=y=z$.

2-й спосіб. Введемо позначення $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, тоді a,b,c — додатні дійсні числа, для яких $abc=1$. В нових позначеннях наша нерівність перепишеться у вигляді:

$$a+b+c\geqslant\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}.$$

Ця нерівність циклічна. Помножимо її обидві частини на спільний знаменник, одержимо рівносильну циклічну нерівність:

$$\sum_{cyc}a(a+1)(b+1)(c+1)\geqslant\sum_{cyc}(a+1)^2(c+1).$$

Розкриємо дужки:

$$\sum_{cyc}a(abc+ab+bc+ca+a+b+c+1)\geqslant\sum_{cyc}\left(a^2+2a+1\right)(c+1).$$

Враховуючи, що $abc=1$, одержуємо:

$$\sum_{cyc}a(ab+bc+ca+a+b+c+2)\geqslant\sum_{cyc}\left(a^2+2a+1\right)(c+1),$$

$$\sum_{cyc}\left(a^2b+abc+ca^2+a^2+ab+ac+2a\right)\geqslant\sum_{cyc}\left(\left(a^2+2a+1\right)c+a^2+2a+1\right),$$

$$\sum_{cyc}\left(a^2b+1+ca^2+a^2+ab+ac+2a\right)\geqslant\sum_{cyc}\left(a^2c+2ac+c+a^2+2a+1\right),$$

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+(1+1+1)+\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)+$$
$$+(ab+bc+ca)+(ca+ab+bc)+2(a+b+c)\geqslant$$
$$\geqslant\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)+2(ca+ab+bc)+(c+a+b)+$$
$$+\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(a+b+c)+(1+1+1).$$

Після скорочення, одержуємо таку нерівність:

$$a^2b+b^2c+c^2a\geqslant a+b+c.$$

Доводиться ця нерівність за допомогою нерівності Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел:

$$a^2b+a^2b+c^2a\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b\cdot a^2b\cdot c^2a}=3a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3a,$$

тобто

$$2a^2b+c^2a\geqslant 3a.$$

Аналогічно доводиться, що

$$2b^2c+a^2b\geqslant 3b$$

і

$$2c^2a+b^2c\geqslant 3c.$$

Додавши ці три нерівності, одержимо, що

$$3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\geqslant 3(a+b+c),$$

тобто

$$a^2b+b^2c+c^2a\geqslant a+b+c,$$

що і завершує розв'язання задачі. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a=b=c=1$, тобто коли $x=y=z$. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $x=y=z$. □

Задача 6.8. *Нехай a, b, c — такі додатні дійсні числа, що $abc=1$. Доведіть, що*

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c}+\frac{(b-1)(a+1)}{1+ca+a}+\frac{(c-1)(b+1)}{1+ab+b}\geqslant 0.$$

(Математична олімпіада для школярів з Бельгії, Нідерландів і Люксембурга, 2013 р.)

Розв'язання. Перейдемо до однорідної нерівності. Для цього введемо позначення: $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, де x, y, z — додатні дійсні числа. Тоді наша нерівність перепишеться так:

$$\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{z}{x}+1\right)}{1+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{z}{x}}+\frac{\left(\frac{y}{z}-1\right)\left(\frac{x}{y}+1\right)}{1+\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}+\frac{x}{y}}+\frac{\left(\frac{z}{x}-1\right)\left(\frac{y}{z}+1\right)}{1+\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}}\geqslant 0.$$

Після спрощення одержимо:

$$\frac{(x-y)(z+x)}{y(x+y+z)}+\frac{(y-z)(x+y)}{z(x+y+z)}+\frac{(z-x)(y+z)}{x(x+y+z)}\geqslant 0,$$

тобто

$$\frac{(x-y)(z+x)}{y}+\frac{(y-z)(x+y)}{z}+\frac{(z-x)(y+z)}{x}\geqslant 0,$$

$$\frac{x(z+x)}{y}+\frac{y(x+y)}{z}+\frac{z(y+z)}{x}\geqslant (z+x)+(x+y)+(y+z),$$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geqslant 2(x+y+z).$$

Останню нерівність доведемо, використовуючи нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел. Маємо,

$$\frac{x^2}{y}+\frac{xy}{z}+z\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\cdot\frac{xy}{z}\cdot z}=3x,$$

тобто

$$\frac{x^2}{y}+\frac{xy}{z}\geqslant 3x-z.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{y^2}{z}+\frac{yz}{x}\geqslant 3y-x,$$

$$\frac{z^2}{x}+\frac{zx}{y}\geqslant 3z-y.$$

Додавши останні три нерівності, одержимо:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geqslant 2(x+y+z).$$

□

Задача 6.9. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, для яких $ab+bc+ca=1$. Доведіть, що*

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{b^2}}\geqslant\sqrt{33}.$$

(Південна Корея, 2010 р.)

Розв'язання. *1-й спосіб.* Використовуючи нерівність Мінковського, одержуємо:

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{b^2}} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a+b+c)^2+(b+c+a)^2+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{2(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}.$$

Далі, використовуючи нерівності Коші і Коші–Буняковського–Шварца, знаходимо:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 3(ab+bc+ca) = 3,$$

тобто $a+b+c \geqslant \sqrt{3}$. А також,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{abc},$$
$$1 = ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca} = 3\sqrt[3]{(abc)^2},$$

тобто $\frac{1}{abc} \geqslant 3\sqrt{3}$.

Таким чином, вираз (6.9) оцінюється так:

$$\sqrt{2(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} \geqslant \sqrt{2\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{33}. \qquad (6.10)$$

Із оцінок (6.9) і (6.10) одержуємо:

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{b^2}} \geqslant \sqrt{33},$$

що і треба було довести.

2-й спосіб. Скористаємося нерівністю Коші–Буняковського–Шварца:

$$a+b+\frac{3}{c} = a\cdot 1+b\cdot 1+\frac{1}{c}\cdot 3 \leqslant \sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}\cdot\sqrt{1^2+1^2+3^2} = \sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}\cdot\sqrt{11}.$$

Звідси знаходимо:

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}} \geqslant \frac{a+b+\frac{3}{c}}{\sqrt{11}}.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{a^2}} \geqslant \frac{b+c+\frac{3}{a}}{\sqrt{11}} \text{ і } \sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{b^2}} \geqslant \frac{c+a+\frac{3}{b}}{\sqrt{11}}.$$

Додавши одержані три нерівності, матимемо:

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+c^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+a^2+\frac{1}{b^2}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{a+b+\frac{3}{c}}{\sqrt{11}}+\frac{b+c+\frac{3}{a}}{\sqrt{11}}+\frac{c+a+\frac{3}{b}}{\sqrt{11}}=$$
$$=\frac{2(a+b+c)+3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{\sqrt{11}}\geqslant\frac{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}=\sqrt{33},$$

що і завершує доведення. □

Задача 6.10. *Нехай a, b, c — сторони деякого трикутника, α, β, γ — його відповідні кути. Доведіть, що*

$$\frac{a-b}{a\cos\beta-b\cos\alpha}+\frac{b-c}{b\cos\gamma-c\cos\beta}+\frac{c-a}{c\cos\alpha-a\cos\gamma}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Розв'язання. За теоремою косинусів, одержуємо:

$$\frac{a-b}{a\cos\beta-b\cos\alpha}=\frac{a-b}{a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=$$
$$=\frac{2c(a-b)}{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}=\frac{2c(a-b)}{2(a^2-b^2)}=\frac{c}{a+b},$$

тобто $\dfrac{a-b}{a\cos\beta-b\cos\alpha}=\dfrac{c}{a+b}$.

Аналогічно обчислюємо, що $\dfrac{b-c}{b\cos\gamma-c\cos\beta}=\dfrac{a}{b+c}$ і $\dfrac{c-a}{c\cos\alpha-a\cos\gamma}=\dfrac{b}{c+a}$.

$$\frac{a-b}{a\cos\beta-b\cos\alpha}+\frac{b-c}{b\cos\gamma-c\cos\beta}+\frac{c-a}{c\cos\alpha-a\cos\gamma}=\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}.$$

Далі, за відомою нерівністю Несбітта: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$, одержуємо:

$$\frac{a-b}{a\cos\beta-b\cos\alpha}+\frac{b-c}{b\cos\gamma-c\cos\beta}+\frac{c-a}{c\cos\alpha-a\cos\gamma}\geqslant\frac{3}{2},$$

що і треба було довести. □

Задача 6.11. *Нехай a, b, c — додатні дійсні числа, для яких $ab+bc+ca=1$. Доведіть, що*

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\leqslant\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

Розв'язання. *1-й спосіб.* Скористаємося нерівністю Гельдера:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(p^3+q^3+r^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\geqslant (apx+bqy+crz)^3,$$

де (a,b,c), (p,q,r), (x,y,z) — три набори додатних дійсних чисел. Її легко довести за допомогою нерівності Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел. Дійсно,

$$3=\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\sum_{cyc}\frac{p^3}{p^3+q^3+r^3}+\sum_{cyc}\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{cyc}\frac{3apx}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(p^3+q^3+r^3)(x^3+y^3+z^3)}},$$

звідки

$$apx+bqy+crz\leqslant\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(p^3+q^3+r^3)(x^3+y^3+z^3)}.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, матимемо:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}\right)(bc+ca+ab)(1+1+1)\geqslant\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3,$$

тобто, враховуючи, що $ab+bc+ca=1$, одержуємо:

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3.$$

Якщо

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^3\geqslant\sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),$$
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\geqslant 3\sqrt{3},$$

тобто, якщо

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant\sqrt[4]{27},$$

то запропонована нерівність доведена.

Якщо $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<\sqrt[4]{27}$, тоді $3\sqrt[4]{3}>\sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$. А тому, для доведення запропонованої нерівності, достатньо довести, що

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}\geqslant 3\sqrt[4]{3}.$$

Дійсно, застосовуючи нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних дійсних чисел:

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{a}}{bc}\cdot\frac{b\sqrt{b}}{ca}\cdot\frac{c\sqrt{c}}{ab}}=\frac{3}{\sqrt[6]{abc}}. \qquad (6.11)$$

Крім того, за нерівністю Коші:

$$1 = ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Звідки знаходимо, що

$$\frac{1}{\sqrt[6]{abc}} \geqslant \sqrt[4]{3}. \tag{6.12}$$

З (6.11) і (6.12) одержуємо:

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc} + \frac{b\sqrt{b}}{ca} + \frac{c\sqrt{c}}{ab} \geqslant 3\sqrt[4]{3},$$

що і завершує розв’язання задачі.

2-й спосіб. Застосовуючи нерівність Коші–Буняковського–Шварца, одержуємо:

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{bc\sqrt{a}}} \cdot \sqrt{bc\sqrt{a}} + \frac{b}{\sqrt{ca\sqrt{b}}} \cdot \sqrt{ca\sqrt{b}} + \frac{c}{\sqrt{ab\sqrt{c}}} \cdot \sqrt{ab\sqrt{c}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{a^2}{bc\sqrt{a}} + \frac{b^2}{ca\sqrt{b}} + \frac{c^2}{ab\sqrt{c}}\right)\left(bc\sqrt{a} + ca\sqrt{b} + ab\sqrt{c}\right),$$

тобто

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc} + \frac{b\sqrt{b}}{ca} + \frac{c\sqrt{c}}{ab} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{bc\sqrt{a} + ca\sqrt{b} + ab\sqrt{c}}.$$

Залишилося довести, що

$$\frac{(a+b+c)^2}{bc\sqrt{a} + ca\sqrt{b} + ab\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{3}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right),$$

тобто, що

$$(a+b+c)^2 \geqslant \sqrt{3}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)\left(bc\sqrt{a} + ca\sqrt{b} + ab\sqrt{c}\right).$$

За нерівністю Коші–Буняковського–Шварца:

$$\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right)^2 \leqslant (ab + bc + ca)(1+1+1) = 1 \cdot 3 = 3,$$

тобто

$$1 \geqslant \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{\sqrt{3}}. \tag{6.13}$$

Знову, за нерівністю Коші–Буняковського–Шварца:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \leqslant (a+b+c)(1+1+1),$$

тобто

$$a + b + c \geqslant \frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2}{3}. \tag{6.14}$$

Далі, за нерівністю Коші між середнім між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних дійсних чисел:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}},$$

тобто

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant 3\sqrt[6]{abc}. \tag{6.15}$$

Знову, за нерівністю Коші між середнім між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних дійсних чисел:

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc},$$

тобто

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[6]{(abc)^2}. \tag{6.16}$$

Перемноживши нерівності (6.13), (6.14), (6.15) і (6.16), одержимо:

$$1\cdot(a+b+c)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\cdot(a+b+c) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3}\cdot 3\sqrt[6]{abc}\cdot 3\sqrt[6]{(abc)^2},$$

тобто, після скорочення, знаходимо, що

$$(a+b+c)^2 \geqslant \sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\sqrt{abc},$$

тобто

$$(a+b+c)^2 \geqslant \sqrt{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(bc\sqrt{a}+ca\sqrt{b}+ab\sqrt{c}\right),$$

що і завершує доведення. □

Задача 6.12. *Нехай*

$$P(x) = ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c$$

і

$$Q(x) = x^4+(b-1)x^3+(a-b)x^2-(c+a)x+c,$$

де x — змінна, a, b, c — ненульові дійсні числа, $b>0$. Відомо, що $P(x)$ має три різні дійсні корені x_0, x_1, x_2, які є коренями $Q(x)$.

а) Доведіть, що $abc>28$.

б) Якщо a, b, c — цілі числа і $b>0$, знайдіть усі їх можливі значення.

(Математична олімпіада Греції, 2015 р.)

Розв'язання. а) Оскільки $\deg P(x) = 3$, а $\deg Q(x) = 4$ і всі три різні корені x_0, x_1, x_2 многочлена $P(x)$ є коренями многочлена $Q(x)$, то

$$a\cdot Q(x) = (x-x_3)P(x), \tag{6.17}$$

для деякого дійсного x_3, тобто x_0, x_1, x_2, x_3 — усі корені многочлена $Q(x)$.

Перепишемо (6.17) в розгорнутому вигляді:

$$ax^4 + a(b-1)x^3 + a(a-b)x^2 - a(c+a)x + ac =$$
$$= ax^4 + (b-a)x^3 - (c+b)x^2 + cx - ax_3x^3 - (b-a)x_3x^2 + (c+b)x_3x - cx_3,$$
$$ax^4 + a(b-1)x^3 + a(a-b)x^2 - a(c+a)x + ac =$$
$$= ax^4 + (b-a-ax_3)x^3 - (c+b-(b-a)x_3)x^2 + (c+(c+b)x_3)x - cx_3.$$

Одержали рівність двох многочленів четвертого степеня. Прирівнюючи їх вільні члени, після скорочення, знаходимо: $x_3 = -a$. Прирівнюючи їх коефіцієнти при x, після спрощення, знаходимо: $b - a = \frac{c}{a}$. Прирівнюючи їх коефіцієнти при x^2, після спрощення, знаходимо: $b - a = \frac{b+c}{2a}$. Прирівнюючи їх коефіцієнти при x^3, після спрощення, знаходимо: $b - a = \frac{b}{a}$. Із цих трьох одержаних рівностей, знаходимо, що $b = c = \frac{a^2}{a-1}$. Оскільки $b > 0$, то $a > 1$.

Таким чином,

$$abc = \frac{a^5}{(a-1)^2},$$

де $a > 1$. Для оцінки abc, розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^5}{(x-1)^2}$, де $x > 1$. Її похідна дорівнює $f'(x) = \frac{x^4(3x-5)}{(x-1)^3}$. Оскільки при $1 < x < \frac{5}{3}$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, а при $x > \frac{5}{3}$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то при $x = \frac{5}{3}$ ця функція досягає найменшого значення $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3125}{108} > 28$, що і завершує розв'язання першого пункту задачі.

б) У випадку, коли a, b, c — цілі невід'ємні числа і $b > 0$, то з рівності $b = \frac{a^2}{a-1}$ випливає, що $a > 1$ і $b = a + 1 + \frac{1}{a-1}$ — натуральне число. Звідси слідує, що $\frac{1}{a-1}$ — натуральне, тобто $a - 1 = 1$, тобто $a = 2$. Далі, послідовно знаходимо, що $b = 4$, $c = 4$. При цих значеннях a, b, c одержуємо, що многочлен

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 4 = 2(x-1)\left(x^2 + 2x - 2\right)$$

має три різні дійсні корені, які є коренями многочлена

$$Q(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4 = (x+2)(x-1)\left(x^2 + 2x - 2\right),$$

що і завершує розв'язання другого пункту задачі.

Відповідь. б) $(a, b, c) = (2, 4, 4)$. □

Задача 6.13. *Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени степеня* 10 *з цілими коефіцієнтами. Відомо, що $P(2) < Q(2)$ і*

$$P(x) \cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{10} \left(C_{k+11}^{k} x^{20-k} - C_{21-k}^{11} x^{k-1} + C_{21}^{11} x^{k-1}\right)$$

для всіх ненульових дійсних x. Знайдіть $P(2)$.

(Online Math Open, 2014 р.)

Розв’язання. Запишемо заданий добуток многочленів $P(x)\cdot Q(x)$ в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}
&C_{11}^{0}x^{20}-C_{21}^{11}x^{-1}+C_{21}^{11}x^{-1}+\\
&+C_{12}^{1}x^{19}-C_{20}^{11}x^{0}+C_{21}^{11}x^{0}+\\
&+C_{13}^{2}x^{18}-C_{19}^{11}x^{1}+C_{21}^{11}x^{1}+\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+C_{20}^{9}x^{11}-C_{12}^{11}x^{8}+C_{21}^{11}x^{8}+\\
&+C_{21}^{10}x^{10}-C_{11}^{11}x^{9}+C_{21}^{11}x^{9}.
\end{aligned}$$

Використовуючи формулу $C_n^k=C_n^{n-k}$, де k і n — цілі, $0\leqslant k\leqslant n$, то останній доданок першого стовпчика і другий стовпчик розгорнутого вигляду перепишемо так:

$$\begin{aligned}
&C_{11}^{0}x^{20}-C_{21}^{11}x^{-1}+C_{21}^{11}x^{-1}+\\
&+C_{12}^{1}x^{19}-C_{20}^{9}x^{0}+C_{21}^{11}x^{0}+\\
&+C_{13}^{2}x^{18}-C_{19}^{8}x^{1}+C_{21}^{11}x^{1}+\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+C_{20}^{9}x^{11}-C_{12}^{1}x^{8}+C_{21}^{11}x^{8}+\\
&+C_{21}^{11}x^{10}-C_{11}^{0}x^{9}+C_{21}^{11}x^{9}.
\end{aligned}$$

Доданки $-C_{21}^{11}x^{-1}$ і $C_{21}^{11}x^{-1}$ першого рядка в сумі дають 0, а тому зникають у розгорнутій сумі. Оскільки нижній доданок першого стовпчика і усі доданки третього стовпчика мають однаковий коефіцієнт C_{21}^{11}, то після винесення його за дужки, ми одержимо перший доданок добутку $P(x)\cdot Q(x)$: $C_{21}^{11}\left(x^{10}+x^{9}+\ldots+x+1\right)$. Крім того, згрупуємо доданки першого стовпчика з відповідними доданками другого, що мають однакові коефіцієнти, ми одержимо всі наступні доданки добутку $P(x)\cdot Q(x)$: $\left(C_{11}^{0}x^{20}-C_{11}^{0}x^{9}\right)$, $\left(C_{12}^{1}x^{19}-C_{12}^{1}x^{8}\right)$, $\left(C_{13}^{2}x^{18}-C_{13}^{2}x^{7}\right)$, $\left(C_{14}^{3}x^{17}-C_{14}^{3}x^{6}\right)$, $\ldots$, $\left(C_{18}^{7}x^{13}-C_{18}^{7}x^{2}\right)$, $\left(C_{19}^{8}x^{12}-C_{19}^{8}x^{1}\right)$, $\left(C_{20}^{9}x^{11}-C_{20}^{9}x^{0}\right)$. Таким чином,

$$\begin{aligned}
P(x)\cdot Q(x)={}&C_{21}^{11}\left(x^{10}+x^{9}+\ldots+x+1\right)+x^{9}\left(x^{11}-1\right)+12x^{8}\left(x^{11}-1\right)+\\
&+C_{13}^{2}x^{7}\left(x^{11}-1\right)+C_{14}^{3}x^{6}\left(x^{11}-1\right)+\ldots+C_{18}^{7}x^{2}\left(x^{11}-1\right)+\\
&+C_{19}^{8}x\left(x^{11}-1\right)+C_{20}^{9}\left(x^{11}-1\right).
\end{aligned}$$

Оскільки $x^{11}-1=(x-1)\left(x^{10}+x^9+\ldots+x+1\right)$, то добуток $P(x)\cdot Q(x)$ розкладається на такі множники:

$$P(x)\cdot Q(x)=\left(x^{10}+x^9\ldots+x+1\right)\cdot\left(C_{21}^{11}+(x-1)\left(x^9+12x^8+C_{13}^2x^7+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_{14}^3x^6+\ldots C_{18}^7x^2+C_{19}^8x+C_{20}^9\right)\right).$$

Оскільки в обох дужках многочлени 10-го степеня, причому многочлен $x^{10}+x^9+\ldots+x+1$ — незвідний, тобто не можна подати у вигляді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами меншого степеня, то матимемо, що

$$P(x)=x^{10}+x^9+\ldots+x+1$$

і

$$Q(x)=(x-1)\left(x^9+12x^8+C_{13}^2x^7+C_{14}^3x^6+\ldots+C_{18}^7x^2+C_{19}^8x+C_{20}^9\right)+C_{21}^{11},$$

бо $P(2)<Q(2)$.

Справді, нехай многочлен $R(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$, де p — просте число (у нашому випадку $p=11$), можна подати у вигляді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами меншого степеня, тоді $R(x+1)$ також подається у вигляді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами. Однак

$$R(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x}=x^{p-1}+C_p^1x^{p-2}+\ldots+C_p^{p-2}x+C_p^{p-1}$$

також многочлен з цілими коефіцієнтами. Його коефіцієнти C_p^k діляться на p для всіх $1\leqslant k\leqslant p-1$ (доведіть це самостійно), а коефіцієнт $C_p^{p-1}=p$ не ділиться на p^2. А тому, за критерієм Ейзенштейна (теорема 3.13) многочлен $R(x+1)$ — незвідний, тобто не подається у вигляді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами. Одержане протиріччя і доводить, що многочлен $R(x)$ також незвідний. А тому незвідним буде і многочлен $P(x)=x^{10}+x^9+\ldots+x+1$.

Залишається довести, що $P(2)<Q(2)$. Дійсно, $P(2)=2^{10}+2^9+\ldots+2+1$, а

$$Q(2)=\left(2^9+12\cdot 2^8+C_{13}^2\cdot 2^7+C_{14}^3\cdot 2^6+\ldots+C_{18}^7\cdot 2^2+C_{19}^8\cdot 2+C_{20}^9\right)+C_{21}^{11}>$$
$$>\left(2^9+2^8+2^7+2^6+\ldots+2^2+2+1\right)+C_{21}^{11}.$$

Отже, потрібно довести, що $C_{21}^{11}>2^{10}$. Справді,

$$C_{21}^{11}=C_{21}^{10}=\frac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=$$
$$=21\cdot 19\cdot 17\cdot 12\cdot 3=244\,188>1024=2^{10},$$

що і завершує доведення.

Таким чином, $P(2)=2^{10}+2^9+\ldots+2+1=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1=2047$.

Відповідь. $P(2) = 2047$. □

Задача 6.14. *Знайти суму усіх натуральних* k, $1 \leqslant k \leqslant 100$, *для яких існують такі натуральні* a *і* b, *що многочлен* $x^{100} - ax^k + b$ *можна розкласти на множники* $\left(x^2 - 2x + 1\right) P(x)$, *де* $P(x)$ — *деякий многочлен з цілими коефіцієнтами.*

(Інтернет олімпіада NIMO, 2015 р.)

Розв'язання. Із умови задачі випливає, що

$$x^{100} - ax^k + b = (x-1)^2 \cdot P(x), \tag{6.18}$$

для будь-якого дійсного x. При $x = 1$ із (6.18) одержуємо:

$$1 - a + b = 0,$$

звідки $a = b + 1$.

Продиференціюємо обидві частини рівності (6.18), одержимо:

$$100x^{99} - akx^{k-1} = 2(x-1) \cdot P(x) + (x-1)^2 \cdot P'(x), \tag{6.19}$$

для будь-якого дійсного x. При $x = 1$ із (6.19) одержуємо:

$$100 - ak = 0,$$

звідки $ak = 100$ і $a = b + 1$. Оскільки $1 \leqslant k \leqslant 100$, і k — дільник числа 100, то $k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50\}$, бо коли $k = 100$, число $b = 0$ — не натуральне. Тому, шукана сума відповідних чисел k дорівнює $1+2+4+5+10+20+25+50 = 117$.

Відповідь. 117. □

Задача 6.15. *Нехай* a — *натуральне число, яке не є квадратом цілого числа, а* r — *дійсний корінь многочлена* $P(x) = x^3 - 2ax + 1$. *Доведіть, що* $r + \sqrt{a}$ — *ірраціональне число.*

(Китайська математична олімпіада для дівчат, 2014 р.)

Розв'язання. Оскільки a — натуральне, яке не є квадратом цілого числа, то $\sqrt{a}$ — ірраціональне число (це відоме твердження з теорії чисел). Припустимо, що $r + \sqrt{a} = s$, де $s \in \mathbb{Q}$, тоді $r = s - \sqrt{a}$. Оскільки r — дійсний корінь многочлена $P(x) = x^3 - 2ax + 1$, то $r^3 - 2ar + 1 = 0$. Тому,

$$\left(s - \sqrt{a}\right)^3 - 2a\left(s - \sqrt{a}\right) + 1 = 0,$$

$$s^3 - 3s^2\sqrt{a} + 3sa - a\sqrt{a} - 2as + 2a\sqrt{a} + 1 = 0,$$

$$\left(s^3 + sa + 1\right) = \left(3s^2 - a\right)\sqrt{a}.$$

Якщо $3s^2 - a \neq 0$, то $\sqrt{a} = \frac{s^3+sa+1}{3s^2-a} \in \mathbb{Q}$, бо s і a — раціональні, що суперечить тому, що a — натуральне і не є квадратом цілого числа. Одержане протиріччя і доводить, що $3s^2 - a = 0$ і $s^3 + sa + 1 = 0$. Звідки $a = 3s^2$ і $s^3 + s \cdot 3s^2 + 1 = 0$, тобто $s^3 = -\frac{1}{4}$, що суперечить припущенню про те, що s — раціональне. Дійсно, з того, що $s^3 = -\frac{1}{4}$ випливає, що $s = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, тобто $\sqrt[3]{4} = -\frac{1}{s}$, що неможливо, бо $\sqrt[3]{4}$ — ірраціональне число, а $-\frac{1}{s}$ — раціональне. Одержані протиріччя і доводять твердження задачі. □

Задача 6.16. *Нехай a, b, c, d, e, f — дійсні числа. Розглянемо два многочлени*

$$P(x) = 2x^4 - 26x^3 + ax^2 + bx + c,$$

$$Q(x) = 5x^4 - 80x^3 + dx^2 + ex + f.$$

Позначимо через S множину усіх чисел (навіть комплексних), кожне із яких є коренем $P(x)$ або $Q(x)$ (чи обох). Відомо, що для даних многочленів $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Знайдіть $P(6) \cdot Q(6)$.

(Інтернет олімпіада NIMO, 2015 р.)

Розв'язання. Сума коренів першого многочлена $P(x)$, за теоремою Вієта, дорівнює $\frac{26}{2} = 13$. Аналогічно, сума коренів другого многочлена $Q(x)$ дорівнює $\frac{80}{5} = 16$. Оскільки $\deg P(x) = 4$ і $\deg Q(x) = 4$, то $P(x)$ і $Q(x)$ мають по чотири корені із множини $S = \{1, 2, 3, 4.5\}$. А тому, спочатку, випишемо усі впорядковані четвірки (в порядку не спадання) із цих коренів, сума яких дорівнює 13:

$$(1, 2, 5, 5), (1, 3, 4, 5), (2, 2, 4, 5), (2, 3, 3, 5), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 3, 4).$$

Далі, випишемо усі впорядковані четвірки (в порядку не спадання) із цих коренів, сума яких дорівнює 16:

$$(1, 5, 5, 5), (2, 4, 5, 5), (3, 3, 5, 5), (3, 4, 4, 5), (4, 4, 4, 4).$$

Оскільки об'єднання четвірки із першої групи з відповідною четвіркою із другої повинно дати множину $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, то одержуємо такі три пари четвірок: $((1, 2, 5, 5); (3, 4, 4, 5))$, $((1, 3, 4, 5); (2, 4, 5, 5))$, $((2, 3, 4, 4); (1, 5, 5, 5))$. Першій парі четвірок відповідають многочлени:

$$P(x) = 2(x-1)(x-2)(x-5)^2 \quad \text{і} \quad Q(x) = 5(x-3)(x-4)^2(x-5).$$

Другій парі четвірок відповідають многочлени:

$$P(x) = 2(x-1)(x-3)(x-4)(x-5) \quad \text{і} \quad Q(x) = 5(x-2)(x-4)(x-5)^2.$$

Третій парі четвірок відповідають многочлени:

$$P(x) = 2(x-2)(x-3)(x-4)^2 \quad \text{і} \quad Q(x) = 5(x-1)(x-5)^3.$$

В усіх цих трьох випадках добуток

$$P(x) \cdot Q(x) = 10(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^2(x-5)^3.$$

Таким чином, $P(6)\cdot Q(6) = 10\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^2\cdot 1^5 = 2400$.

Відповідь. 2400. □

Задача 6.17. *Нехай $P(x)$ — многочлен степеня $m \leqslant 10$ з цілими коефіцієнтами. Відомо, що $P(0) = 0$, $P(x)$ має m різних цілих коренів і многочлен $P(x)+1$ можна подати у вигляді добутку двох несталих многочленів з цілими коефіцієнтами. Знайти суму усіх можливих значень $P(2)$.*

(Інтернет олімпіада NIMO, 2014 р.)

Розв'язання. За умовою задачі $P(x) = Q_1(x)\cdot Q_2(x) - 1$, де $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ — многочлени натурального степеня з цілими коефіцієнтами. Нехай r_1, $r_2, \ldots, r_m$ — різні цілі числа, які є коренями $P(x)$. Тоді, $P(r_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Звідси слідує, що

$$\begin{cases} Q_1(r_1)\cdot Q_2(r_1) = 1, \\ Q_1(r_2)\cdot Q_2(r_2) = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_1(r_m)\cdot Q_2(r_m) = 1. \end{cases}$$

Оскільки числа $Q_1(r_i)$ і $Q_2(r_i)$ — цілі, то із першої рівності системи слідує, що $Q_1(r_1) = Q_2(r_1) = 1$ або $Q_1(r_1) = Q_2(r_1) = -1$. В обох випадках $Q_1(r_1) = Q_2(r_1)$. Аналогічно, $Q_1(r_2) = Q_2(r_2), \ldots, Q_1(r_m) = Q_2(r_m)$.

Нехай $R(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$, тоді r_1, r_2, $\ldots$, r_m — корені $R(x)$. Оскільки $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ — несталі многочлени з цілими коефіцієнтами, то $0 < \deg Q_1(x) < m$ і $0 < \deg Q_2(x) < m$, бо $\deg Q_1(x) + \deg Q_2(x) = \deg P(x) = m$. Враховуючи, що $R(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$, то $R(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, степінь якого менший m. Оскільки він має m різних коренів, то він є сталим, причому $R(x) = 0$, для всіх дійсних $x \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що $Q_1(x) = Q_2(x) = Q(x)$, де $Q(x)$ — зведений многочлен з цілими коефіцієнтами, степінь якого менший m. Отже, $P(x) = (Q(x))^2 - 1$, для всіх $x \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що степінь многочлена $P(x)$ буде завжди парним числом, тобто може дорівнювати 10, 8, 6, 4 або 2. В свою чергу одержуємо, що степінь многочлена $Q(x)$ може відповідно дорівнювати 5, 4, 3, 2 або 1. Оскільки $P(x) = (Q(x)-1)(Q(x)+1)$, а $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — різні цілі корені $P(x)$, то $Q(r_i) = \pm 1$, для $i = 1, 2, \ldots, m$. Оскільки степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює $\frac{m}{2}$, то $Q(x)$ приймає значення 1 рівно в $\frac{m}{2}$ із цих чисел (мова йде про числа r_1, r_2, $\ldots$, r_m), а значення -1 приймає в решта $\frac{m}{2}$ із цих чисел. Іншими словами, якщо відповідно перенумерувати числа r_1, r_2, $\ldots$, r_m, то ми можемо записати

$$Q(x) = (x - r_1)\ldots\left(x - r_{m/2}\right) - 1 = \left(x - r_{m/2+1}\right)\ldots(x - r_m) + 1.$$

Тоді
$$Q(0) = (-1)^{m/2} r_1 \dots r_{m/2} - 1 = (-1)^{m/2} r_{m/2+1} \dots r_m + 1.$$
Оскільки $P(0) = 0$, то серед чисел $r_1, r_2, \dots, r_m$ обов'язково одне дорівнює 0. Це означає, що добуток $\frac{m}{2}$ різних цілих ненульових чисел дорівнює 2 або -2. Це може бути лише для чисел ± 1 і ± 2, причому 2 і -2 в цей добуток одночасно не можуть, бо тоді він дорівнював би ± 4. Отже, $\frac{m}{2} \leqslant 3$, тобто степінь многочлена $Q(x)$ може дорівнювати 3, 2 або 1.

Нехай $\frac{m}{2} = 3$, тобто $m = 6$. Тоді
$$Q(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) - 1 = \left(x - r_4\right)(x - r_5)(x - r_6) + 1,$$
звідки
$$Q(0) = -r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 - 1 = -r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 + 1.$$
Оскільки $P(0) = 0$, то не порушуючи загальності будемо вважати, що $r_1 = 0$ або $r_4 = 0$. Нехай $r_1 = 0$. Тоді, $r_4 \cdot r_5 \cdot r_6 = 2$. Звідки $r_4 = -1$, $r_5 = 1$ і $r_6 = -2$ (у цих цілих чисел може бути й інша комбінація знаків і для них розв'язання буде аналогічним). Тому для цього випадку:
$$Q(x) = (x - r_2)(x - r_3)\,x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + 2) + 1.$$
Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки, одержимо:
$$Q(x) = x^3 - (r_2 + r_3)\,x^2 + r_2 r_3 x = x^3 + 2x^2 - x - 2 + 1.$$
Прирівнюючи відповідні коефіцієнти цих двох рівних многочленів, одержуємо, що $r_2 + r_3 = -2$ і $r_2 r_3 = -1$. Із останньої рівності в цілих числах випливає, що числа r_2, r_3 співпадають з числами r_4, r_5, що забороняється умовою задачі. Випадок, коли $r_4 = 0$, також результату не дає. Таким чином, $Q(x)$ — лінійний або квадратний зведений многочлен.

Нехай $\frac{m}{2} = 2$, тобто $m = 4$. Тоді
$$Q(x) = (x - r_1)(x - r_2) - 1 = (x - r_3)\left(x - r_4\right) + 1,$$
звідки
$$Q(0) = r_1 \cdot r_2 - 1 = r_3 \cdot r_4 + 1.$$
Оскільки $P(0) = 0$, то не порушуючи загальності будемо вважати, що $r_1 = 0$ або $r_3 = 0$. Якщо $r_1 = 0$, тоді, $r_3 \cdot r_4 = -2$. Звідки $r_3 = -1$, $r_4 = 2$ або $r_3 = 1$, $r_4 = -2$. Для першого випадку одержуємо, що
$$Q(x) = x(x - r_2) - 1 = (x + 1)(x - 2) + 1,$$
тобто $Q(x) = x^2 - x - 1$ і $r_2 = 1$. Для другого випадку одержуємо, що
$$Q(x) = x(x - r_2) - 1 = (x - 1)(x + 2) + 1,$$

тобто $Q(x) = x^2 + x - 1$ і $r_2 = -1$. Якщо $r_3 = 0$, тоді, $r_1 \cdot r_2 = 2$. Звідки $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ або $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Для першого випадку одержуємо, що

$$Q(x) = (x+1)(x+2) - 1 = x\left(x - r_4\right) + 1,$$

тобто $Q(x) = x^2 + 3x + 1$ і $r_4 = -3$. Для другого випадку одержуємо, що

$$Q(x) = (x-1)(x-2) - 1 = x\left(x - r_4\right) + 1,$$

тобто $Q(x) = x^2 - 3x + 1$ і $r_4 = 3$.

Якщо $Q(x)$ — зведений многочлен першого степеня з цілими коефіцієнтами, то $Q(x) = x + 1$ або $Q(x) = x - 1$ (нагадаємо, що вільний член $Q(x)$ дорівнює ± 1).

Таким чином, шуканим многочленом $P(x)$ можуть бути: $P(x) = (x+1)^2 - 1$, $P(x) = (x-1)^2 - 1$, $P(x) = \left(x^2 - x - 1\right)^2 - 1$, $P(x) = \left(x^2 + x - 1\right)^2 - 1$, $P(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)^2 - 1$ і $P(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)^2 - 1$. Знаходимо відповідні значення: $P(2) = 8$, $P(2) = 0$, $P(2) = 0$, $P(2) = 24$, $P(2) = 0$ і $P(2) = 120$.

Отже, шукана сума дорівнює:

$$\sum P(2) = 8 + 0 + 0 + 24 + 0 + 120 = 152.$$

Відповідь. $\sum P(2) = 152$. □

Задача 6.18. *Знайдіть усі зведені многочлени $P(x)$ другого степеня з цілими коефіцієнтами, для кожного із яких існує многочлен $Q(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $P(x) \cdot Q(x)$ — многочлен, усі коефіцієнти якого дорівнюють ± 1.*

(Польща, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2006 р.)

Розв'язання. Нехай $P(x) = x^2 + ax + b$ — шуканий многочлен, де a, b — цілі числа. Тоді, за умовою задачі, існує такий многочлен $Q(x) = c_n x^n + \ldots + c_0$, де $c_n, \ldots, c_0$ — цілі числа, $c_n \neq 0$, що $P(x) \cdot Q(x) = \pm x^{n+2} \pm x^{n+1} \pm \ldots \pm 1$. Оскільки $P(0) \cdot Q(0) = \pm 1$, то $b \cdot c_0 = \pm 1$. Враховуючи, що b і c_0 — цілі, то $b = \pm 1$ і $c_0 = \pm 1$. Таким чином, шуканий многочлен $P(x)$ повинен мати вигляд: $P(x) = x^2 + ax \pm 1$, де a — деяке ціле число.

А тепер доведемо таке допоміжне твердження: *якщо усі коефіцієнти многочлена дорівнюють ± 1, то модуль усіх його коренів менший 2.*

Доведення. Нехай $f(x)$ — многочлен, степінь якого дорівнює n і усі його коефіцієнти дорівнюють ± 1. Якщо $n = 1$, то $f(x)$ має корінь 1 або -1. Для цього випадку твердження виконується. Припустимо, що z — корінь $f(x)$ і $|z| \geqslant 2$. Тоді, $|z| > 1$ і

$$|z|^n = \left|\pm z^{n-1} \pm z^{n-2} \pm \ldots \pm 1\right| \leqslant |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

Звідси слідує, що $|z|^n(|z|-1) \leqslant |z|^n - 1$, тобто $|z|^n(|z|-2) \leqslant -1$. Звідси й слідує, що $|z| < 2$, що і завершує доведення твердження.

Якщо шуканий многочлен має вигляд $P(x) = x^2 + ax + 1$, то неможливо, щоб $|a| \geqslant 3$, бо тоді він має один із коренів, модуль якого дорівнює $\frac{|a|+\sqrt{a^2-4}}{2}$, і при $|a| \geqslant 3$ матимемо: $\frac{|a|+\sqrt{a^2-4}}{2} \geqslant \frac{3+\sqrt{3^2-4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 2$. Таким чином, у цьому випадку, $|a| \leqslant 2$, тобто $a \in \{-2,-1,0,1,2\}$, і шукані многочлени потрібно шукати серед многочленів: $x^2 \pm 2x + 1$, $x^2 \pm x + 1$ і $x^2 + 1$.

Якщо шуканий многочлен має вигляд $P(x) = x^2 + ax - 1$, то неможливо, щоб $|a| \geqslant 2$, бо тоді він має один із коренів, модуль якого дорівнює $\frac{|a|+\sqrt{a^2+4}}{2}$, і при $|a| \geqslant 2$ матимемо: $\frac{|a|+\sqrt{a^2+4}}{2} \geqslant \frac{2+\sqrt{2^2+4}}{2} = \frac{2+\sqrt{8}}{2} > 2$. Таким чином, у цьому випадку, $|a| \leqslant 1$, тобто $a \in \{-1,0,1\}$, і шукані многочлени потрібно шукати серед многочленів: $x^2 \pm x - 1$ і $x^2 - 1$.

Залишилося підібрати многочлени $Q(x)$ для кожного із одержаних многочленів.

Якщо $P(x) = x^2 \pm 1$, то $Q(x) = x - 1$. Дійсно, $\left(x^2 \pm 1\right)(x-1) = x^3 - x^2 \pm x \mp 1$. Якщо $P(x) = x^2 \pm x \pm 1$, то $Q(x) = 1$. Якщо $P(x) = x^2 + 2x + 1$, то $Q(x) = x - 1$. Дійсно, $\left(x^2 + 2x + 1\right)(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$. Якщо $P(x) = x^2 - 2x + 1$, то $Q(x) = x + 1$. Дійсно, $\left(x^2 - 2x + 1\right)(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Відповідь. $x^2 \pm 1$, $x^2 \pm x \pm 1$, $x^2 \pm 2x + 1$. □

Задача 6.19. *Знайдіть всі пари зведених многочленів $p(x)$ і $q(x)$ степеня n, $n \geqslant 1$, кожний, які мають по n коренів, що є невід'ємними цілими числами, для яких виконується рівність $p(x) - q(x) = 1$ для кожного дійсного x.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Центральної Америки, 2013 р.)

Розв'язання. Нехай $p(x)$ і $q(x)$ — шукані многочлени. Позначимо через p_i і q_i — цілі невід'ємні корені многочленів $p(x)$ і $q(x)$, що йдуть в неспадному порядку, тобто $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$ і $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n$. Далі розглянемо два випадки.

1) $p_1 \leqslant q_1$. Розглянемо многочлени $P(x) = p(x + p_1)$ і $Q(x) = q(x + p_1)$. Тоді, ці нові многочлени також задовольняють умову $P(x) - Q(x) = 1$ для кожного дійсного x. Дійсно, $P(x) - Q(x) = p(x + p_1) - q(x + p_1) = 1$, бо для многочленів $p(x)$ і $q(x)$ виконується ця умова. Далі, знаходимо, що $Q(0) = -1$. Дійсно, $Q(0) = P(0) - 1 = p(p_1) - 1 = -1$. Крім того, числа $q_i - p_1$ — корені $Q(x)$. Дійсно, $Q(q_i - p_1) = q((q_i - p_1) + p_1) = q(q_i) = 0$, бо за припущенням цілі невід'ємні числа q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, корені $q(x)$. Це означає, що $Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - (q_i - p_1))$. Звідси знаходимо, що $Q(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(q_i - p_1)$. За

доведеним вище, $Q(0)=-1$. Тому, $(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(q_i-p_1)=-1$. Оскільки $p_1\leqslant q_1$, то числа q_i-p_1 невід'ємні і цілі. З останньої рівності слідує, що n — непарне і кожне з чисел q_1-p_1, q_2-p_1, $\ldots$, q_n-p_1 дорівнює 1. Це означає, що $Q(x)=(x-1)^n$, де n — непарне. Тоді, $P(x)=(x-1)^n+1$, де n — непарне. Нехай $n>1$, тоді

$$P(x)=x^n-nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}-\ldots+nx.$$

Якщо $P_1,P_2,\ldots,P_n$ — цілі невід'ємні корені многочлена $P(x)$, то за формулами Вієта:

$$P_1+P_2+\ldots+P_n=n$$

і

$$P_1P_2+P_1P_3+\ldots+P_1P_n+\ P_2P_3+\ldots+P_2P_n+\ldots+P_{n-1}P_n=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Звідси слідує, що

$$\begin{aligned}P_1^2+P_2^2+\ldots+P_n^2&=\\&=(P_1+P_2+\ldots+P_n)^2-2(P_1P_2+P_1P_3+\ldots+P_{n-1}P_n)=\\&=n^2-2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n.\end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Коші між середнім квадратичним і середнім арифметичним невід'ємних чисел $P_1,P_2,\ldots,P_n$:

$$\sqrt{\frac{P_1^2+P_2^2+\ldots+P_n^2}{n}}\geqslant\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{n},$$

одержуємо, $\sqrt{1}\geqslant 1$, тобто виконується рівність. Це буде тоді і тільки тоді, коли $P_1=P_2=\ldots=P_n=1$. Тому, $P(x)=(x-1)^n$, що суперечить раніше одержаній рівності $P(x)=(x-1)^n+1$. Одержане протиріччя і доводить, що $n=1$, тобто $p(x)=x-a$ і $q(x)=x-a-1$, де a — ціле невід'ємне число.

2) $q_1\leqslant p_1$. Розглянемо многочлени $P(x)=p(x+q_1)$ і $Q(x)=q(x+q_1)$. Тоді, ці нові многочлени також задовольняють умову $P(x)-Q(x)=1$ для кожного дійсного x. Дійсно, $P(x)-Q(x)=p(x+q_1)-q(x+q_1)=1$, бо для многочленів $p(x)$ і $q(x)$ виконується ця умова. Далі, знаходимо, що $P(0)=1$. Дійсно, $P(0)=Q(0)+1=q(q_1)+1=1$. Крім того, числа p_i-q_1 — корені $P(x)$. Дійсно, $P(p_i-q_1)=p((p_i-q_1)+q_1)=p(p_i)=0$, бо за припущенням цілі невід'ємні числа p_i, $i=1,2,\ldots,n$, корені $p(x)$. Це означає, що $P(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-(p_i-q_1))$. Звідси знаходимо, що $P(0)=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(p_i-q_1)$. За

доведеним вище, $P(0) = 1$. Тому, $(-1)^n \prod_{i=1}^{n} (p_i - q_1) = 1$. Оскільки $q_1 \leqslant p_1$, то числа $p_i - q_1$ невід'ємні і цілі. З останньої рівності слідує, що n — парне і кожне з чисел $p_1 - q_1, p_2 - q_1, \ldots, p_n - q_1$ дорівнює 1. Це означає, що $P(x) = (x-1)^n$, де n — парне. Тоді, $Q(x) = (x-1)^n - 1$, де n — парне. Нехай $n > 2$, тоді

$$Q(x) = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} - \ldots - nx.$$

Якщо $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — цілі невід'ємні корені многочлена $Q(x)$, то за формулами Вієта:

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = n$$

і

$$Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + \ldots + Q_1Q_n + Q_2Q_3 + \ldots + Q_2Q_n + \ldots + Q_{n-1}Q_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Звідси слідує, що

$$\begin{aligned} &Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots + Q_n^2 = \\ &\quad = (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n)^2 - 2(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + \ldots + Q_{n-1}Q_n) = \\ &\qquad = n^2 - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Коші між середнім квадратичним і середнім арифметичним невід'ємних чисел $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$:

$$\sqrt{\frac{Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots + Q_n^2}{n}} \geqslant \frac{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n}{n},$$

одержуємо, $\sqrt{1} \geqslant 1$, тобто для цієї нерівності виконується рівність. Це буде тоді і тільки тоді, коли $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = 1$. Тому, $Q(x) = (x-1)^n$, що суперечить раніше одержаній рівності $Q(x) = (x-1)^n - 1$. Одержане протиріччя і доводить, що $n = 2$, тобто $p(x) = (x-a)^2$ і $q(x) = (x-a-1)(x-a+1)$, де a — натуральне число.

Відповідь. $p(x) = x - a$ і $q(x) = x - a - 1$, де a — ціле невід'ємне число; $p(x) = (x-a)^2$ і $q(x) = (x-a-1)(x-a+1)$, де a — натуральне число. □

Задача 6.20. *Послідовність многочленів $(P_n(x))$ визначається наступним чином: $P_0(x) = x$ і $P_n(x) = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1)$, $n \geqslant 1$. Знайти найбільше k таке, що $P_{2014}(x)$ ділиться на x^k.*

(Математична олімпіада Бразилії, 2014 р.)

Розв'язання. За означенням маємо:

1) $P_{2014}(x) = P_{2013}(x-1) \cdot P_{2013}(x+1)$;

2) $P_{2014}(x) = P_{2012}(x-2)P_{2012}(x) \cdot P_{2012}(x)P_{2012}(x+2)$, тобто $P_{2014}(x) = P_{2012}(x-2) \cdot (P_{2012}(x))^2 \cdot P_{2012}(x+2)$;
3) $P_{2014}(x) = P_{2011}(x-3)P_{2011}(x-1) \cdot (P_{2011}(x-1)P_{2011}(x+1))^2 \cdot \cdot P_{2011}(x+1)P_{2011}(x+3)$, тобто:

$$P_{2014}(x) = P_{2011}(x-3) \cdot (P_{2011}(x-1))^3 \cdot (P_{2011}(x+1))^3 \cdot P_{2011}(x+3).$$

Напрошується гіпотеза:

$$P_{2014}(x) = \prod_{i=0}^{n} \left(P_{2014-n}(x-n+2i)\right)^{C_n^i},$$

для будь-якого цілого n, $0 \leqslant n \leqslant 2014$. Справедливість цієї гіпотези доведемо *методом математичної індукції*.

База індукції. При $n = 1$ маємо: $P_{2014}(x) = P_{2013}(x-1) \cdot P_{2013}(x+1) = \prod\limits_{i=0}^{1} \left(P_{2014-1}(x-1+2i)\right)^{C_1^i}$.

Крок індукції. Нехай гіпотеза справедлива для деякого k, де $0 < k < 2014$, тобто: $P_{2014}(x) = \prod\limits_{i=0}^{k} \left(P_{2014-k}(x-k+2i)\right)^{C_k^i}$. Доведемо, використовуючи це представлення, що гіпотеза буде справедливою і для $n = k+1$. Дійсно,

$$P_{2014}(x) = \prod_{i=0}^{k} \left(P_{2014-k}(x-k+2i)\right)^{C_k^i} =$$

$$= \prod_{i=0}^{k} \left(P_{2014-k-1}(x-k-1+2i) \cdot P_{2014-k-1}(x-k+1+2i)\right)^{C_k^i} =$$

$$= \prod_{i=0}^{k} \left(P_{2014-k-1}(x-k-1+2i)\right)^{C_k^i} \cdot \prod_{i=0}^{k} \left(P_{2014-k-1}(x-k+1+2i)\right)^{C_k^i} =$$

$$= \prod_{i=0}^{k} \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2i)\right)^{C_k^i} \cdot \prod_{i=0}^{k} \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2(i+1))\right)^{C_k^i} =$$

$$= \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1))\right)^{C_k^0} \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2i)\right)^{C_k^i} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2(i+1))\right)^{C_k^i} \cdot \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2(k+1))\right)^{C_k^k} =$$

$$= \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1))\right)^{C_{k+1}^0} \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2i)\right)^{C_k^i} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{k} \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2i)\right)^{C_k^{i-1}} \cdot \left(P_{2014-(k+1)}(x-(k+1)+2(k+1))\right)^{C_{k+1}^{k+1}} =$$

$$= \left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)\right)\right)^{C_{k+1}^{0}} \cdot \prod_{i=1}^{k}\left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)+2i\right)\right)^{C_{k}^{i}+C_{k}^{i-1}} \cdot$$

$$\cdot\left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)+2\left(k+1\right)\right)\right)^{C_{k+1}^{k+1}} =$$

$$= \left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)\right)\right)^{C_{k+1}^{0}} \cdot \prod_{i=1}^{k}\left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)+2i\right)\right)^{C_{k+1}^{i}} \cdot$$

$$\cdot\left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)+2\left(k+1\right)\right)\right)^{C_{k+1}^{k+1}} =$$

$$= \prod_{i=0}^{k+1}\left(P_{2014-(k+1)}\left(x-(k+1)+2i\right)\right)^{C_{k+1}^{i}},$$

що і завершує доведення.

Тепер, для $n = 2014$ ми одержуємо, що

$$P_{2014}\left(x\right) = \prod_{i=0}^{2014}\left(x-2014+2i\right)^{C_{2014}^{i}}.$$

Зрозуміло, що вираз $(x-2014+2i)^{C_{2014}^{i}}$ буде мати вигляд x^k, якщо $2i = 2014$, тобто $i = 1007$, а тоді шукане $k = C_{2014}^{1007}$.

Відповідь. $k = C_{2014}^{1007}$. □

Задача 6.21. *Знайдіть кількість впорядкованих пар $\left(P\left(x\right), Q\left(x\right)\right)$ многочленів з цілими коефіцієнтами, для яких виконується тотожність*

$$P(x)^2 + Q(x)^2 = \left(x^{4096}-1\right)^2.$$

(Online Math Open, 2015 р.)

Розв'язання. Оскільки $4096 = 2^{12}$, то будемо розв'язувати узагальнення цієї задачі, тобто будемо знаходити число впорядкованих пар $\left(P\left(x\right), Q\left(x\right)\right)$ многочленів з цілими коефіцієнтами, для яких виконується тотожність

$$P(x)^2 + Q(x)^2 = \left(x^{2^n}-1\right)^2,$$

для кожного натурального n.

Нехай n — задане натуральне число. Розкладемо многочлен $\left(x^{2^n}-1\right)^2$ на незвідні множники в $\mathbb{Z}\left[x\right]$:

$$\left(x^{2^n}-1\right)^2 = (x-1)^2(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2 \ldots \left(x^{2^{n-1}}+1\right)^2. \tag{6.20}$$

Доведемо, що многочлен $x^{2^k}+1$, де k — натуральне, буде незвідний в $\mathbb{Z}\left[x\right]$. Припустимо, що це не так. Тоді, звідним буде і многочлен, який одержується із цього многочлена заміною x на $x+1$, тобто звідним в $\mathbb{Z}\left[x\right]$ буде і такий многочлен:

$$(x+1)^{2^k}+1=x^{2^k}+C_{2^k}^{1}x^{2^k-1}+\ldots+C_{2^k}^{2^k-1}x+2.$$

Кожний коефіцієнт $C_{2^k}^{2^k-i}$, де $i=1,2,\ldots,2^k-1$, розкладу буде ділитися на 2 (доведіть це самостійно), а вільний член, який дорівнює 2, теж ділиться на 2, але не ділиться на $2^2=4$. А тому, за *критерієм Ейзенштейна* (теорема 3.13) многочлен $x^{2^k}+C_{2^k}^{1}x^{2^k-1}+\ldots+C_{2^k}^{2^k-1}x+2$ — незвідний, тобто не подається у вигляді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами. Одержане протиріччя і доводить, що многочлен $x^{2^k}+1$ також незвідний. З'ясуємо, скількома способами квадрат цього незвідного многочлена можна подати у вигляді $A(x)^2+B(x)^2$, де $A(x)$ і $B(x)$ — многочлени з цілими коефіцієнтами. Для цього скористаємося комплексними числами:

$$(A(x)+iB(x))(A(x)-iB(x))=\left(x^{2^{k-1}}+i\right)^2\left(x^{2^{k-1}}-i\right)^2. \qquad (6.21)$$

Зрозуміло, що коли множник $A(x)+iB(x)$ визначений, то другий множник $A(x)-iB(x)$ визначається однозначно із (6.20). А от множник $A(x)+iB(x)$ може визначатися трьома різними способами:

1) $A(x)+iB(x)=\left(x^{2^{k-1}}+i\right)^2$;

2) $A(x)+iB(x)=\left(x^{2^{k-1}}-i\right)^2$;

3) $A(x)+iB(x)=\left(x^{2^{k-1}}+i\right)\left(x^{2^{k-1}}-i\right)$,

бо коли один із множників входить до $A(x)+iB(x)$, то спряжений до нього повинен входити до $A(x)-iB(x)$. Далі, використовуючи формулу

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,$$

і рівність (6.20), ми одержуємо, що $P(x)^2+Q(x)^2$ можна отримати 3^{n-1} способами, бо незвідних множників в правій частині (6.20) рівно $n-1$: x^2+1, $x^{2^2}+1,\ldots,x^{2^{n-1}}+1$. Причому розклад на множники обох многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ починатиметься з добутку $(x+1)(x-1)$, а далі будуть йти незвідні множники. Оскільки кожне із одержаних представлень $P(x)^2+Q(x)^2$, задає впорядковану пару $(P(x),Q(x))$ многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ з цілими коефіцієнтами, то це ж представлення задаватиме ще три різні пари: $(-P(x),Q(x))$, $(P(x),-Q(x))$ і $(-P(x),-Q(x))$. Тому, за правилом добутку, число потрібних пар буде дорівнювати $4\cdot 3^{n-1}$.

Для нашого випадку, коли $n=12$, шукана кількість пар буде дорівнювати $4\cdot 3^{11}=708\,588$.

Відповідь. 708 588. □

Задача 6.22. *Нехай p і q — прості числа. Послідовність (x_n) визначається наступним чином: $x_1 = 1$, $x_2 = p$ і $x_{n+1} = px_n - qx_{n-1}$ для всіх натуральних $n \geqslant 2$. Відомо, що для деякого натурального k виконується рівність $x_{3k} = -3$. Знайдіть p і q.*

(Аргентина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2010 р.)

Розв'язання. Якщо p і q обидва непарні, то за модулем 2 наша послідовність набуває вигляду: $1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$, для якої, очевидно, x_{3i} — парні числа, для всіх $i = 1, 2, 3, \ldots$, а тому не дорівнюють -3.

Якщо $p = q = 2$, то, починаючи з другого члена, усі члени нашої послідовності будуть парними і не будуть дорівнювати -3.

Якщо $p = 2$ і q — непарне просте число чи p — непарне просте число і $q = 2$, розглянемо нашу послідовність за $\operatorname{mod}\left(p^2 - q\right)$: $1, p, 0, -pq, -p^2q, 0, p^2q^2, p^3q^2, 0, -p^3q^3, -p^4q^3, 0, \ldots$. Доведемо *методом математичної індукції*, що $x_{3k-2} \equiv (-1)^{k-1}p^{k-1}q^{k-1}$, $x_{3k-1} \equiv (-1)^{k-1}p^kq^{k-1}$ і $x_{3k} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\left(p^2 - q\right)\right)$, для будь-якого натурального k.

База індукції. При $k = 1$ маємо: $x_1 \equiv 1 = (-1)^0p^0q^0$, $x_2 \equiv p = (-1)^0p^1q^0$, $x_3 \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\left(p^2 - q\right)\right)$.

Крок індукції. Нехай для деякого натурального k виконуються конгруенції: $x_{3k-2} \equiv (-1)^{k-1}p^{k-1}q^{k-1}$, $x_{3k-1} \equiv (-1)^{k-1}p^kq^{k-1}$ і $x_{3k} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\left(p^2 - q\right)\right)$. Доведемо, використовуючи це припущення, що $x_{3k+1} \equiv (-1)^kp^kq^k$, $x_{3k+2} \equiv (-1)^kp^{k+1}q^k$ і $x_{3k+3} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\left(p^2 - q\right)\right)$.

Справді,

$$
\begin{aligned}
x_{3k+1} &= px_{3k} - qx_{3k-1} \equiv p \cdot 0 - q \cdot (-1)^{k-1}p^kq^k = (-1)^kp^kq^k,\\
x_{3k+2} &= px_{3k+1} - qx_{3k} \equiv p \cdot (-1)^kp^kq^k - q \cdot 0 = (-1)^kp^{k+1}q^k,\\
x_{3k+3} &= px_{3k+2} - qx_{3k+1} \equiv p \cdot (-1)^kp^{k+1}q^k - q \cdot (-1)^kp^kq^k =\\
&= (-1)^kp^kq^k\left(p^2 - q\right) \equiv 0,
\end{aligned}
$$

що і треба було довести.

Таким чином, за принципом математичної індукції, $x_{3k} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\left(p^2 - q\right)\right)$, для будь-якого натурального k. Це означає, що за умовою задачі, для деякого натурального k виконується рівність $n\left(p^2 - q\right) = -3$, для деякого цілого n. Оскільки 3 — просте число, то для виконання рівності можливі такі випадки:

1) $\begin{cases} n = -3, \\ p^2 - q = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} n = -1, \\ p^2 - q = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} n = 1, \\ p^2 - q = -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} n = 3, \\ p^2 - q = -1. \end{cases}$

Якщо $p = 2$, тоді із цих систем знаходимо, що $q = 3$, $q = 5$ або $q = 7$. Якщо $q = 2$, тоді із цих систем слідує, що непарного простого p не існує.

Залишається перевірити чи буде виконуватися умова задачі для знайдених пар простих чисел.

Якщо $p = 2$ і $q = 3$, то задана послідовність (x_n) визначається наступним чином: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ і $x_{n+1} = 2x_n - 3x_{n-1}$ для всіх натуральних $n \geqslant 2$. За mod 3 ця послідовність набуває вигляду: $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$. Дійсно, якщо $x_n \equiv 1 \pmod 3$, то $x_{n+1} \equiv 2x_n \equiv 2 \pmod 3$, а якщо $x_n = 2 \pmod 3$, то $x_{n+1} \equiv 2x_n \equiv$ $\equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$. Це означає, що жоден із членів цієї послідовності не ділиться на 3, тобто не може дорівнювати -3. Отже, пара простих чисел $p = 2$ і $q = 3$ не задовольняє умовам задачі.

Якщо $p = 2$ і $q = 5$, то задана послідовність (x_n) визначається наступним чином: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ і $x_{n+1} = 2x_n - 5x_{n-1}$ для всіх натуральних $n \geqslant 2$. За mod 6 ця послідовність набуває вигляду: $1, 2, 5, 0, 5, 4, 1, 0, 1, 2, \ldots$.

Справді, $x_{n+1} \equiv 2x_n + x_{n-1} \pmod 6$, тому, коли $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, послідовно одержуємо:

$$
\begin{aligned}
&x_3 \equiv 2 \cdot 2 + 1 = 5 \pmod 6, && x_4 \equiv 2 \cdot 5 + 2 \equiv 0 \pmod 6,\\
&x_5 \equiv 2 \cdot 0 + 5 \equiv 5 \pmod 6, && x_6 \equiv 2 \cdot 5 + 0 \equiv 4 \pmod 6,\\
&x_7 \equiv 2 \cdot 4 + 5 \equiv 1 \pmod 6, && x_8 \equiv 2 \cdot 1 + 4 \equiv 0 \pmod 6,\\
&x_9 \equiv 2 \cdot 0 + 1 \equiv 1 \pmod 6, && x_{10} \equiv 2 \cdot 1 + 0 \equiv 2 \pmod 6 \text{ і т. д.}
\end{aligned}
$$

Помічаємо, що ця послідовність періодична, з періодом 8, і не містить 3, бо $-3 \equiv 3 \pmod 6$. Це означає, що жоден із членів цієї послідовності не може дорівнювати -3. Отже, пара простих чисел $p = 2$ і $q = 5$ не задовольняє умовам задачі.

Якщо $p = 2$ і $q = 7$, то задана послідовність (x_n) визначається наступним чином: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ і $x_{n+1} = 2x_n - 7x_{n-1}$ для всіх натуральних $n \geqslant 2$. Вже перше обчислення дає $x_3 = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = -3$. Отже, пара простих чисел $p = 2$ і $q = 7$ задовольняє умовам задачі.

Відповідь. $p = 2$, $q = 7$. □

Задача 6.23. *Послідовність (a_n) визначається наступним чином:*

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2m \cdot a_{m-1} + 1}$$

для всіх натуральних $m > 1$. Знайдіть значення суми $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ для кожного значення $k > 1$.

(Боснія і Герцеговина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2014 р.)

Розв'язання. Оскільки $a_1 = \frac{1}{2} > 0$, то за означенням $a_m > 0$ при всіх $m > 1$. Тоді $\frac{1}{a_m} = \frac{1}{a_{m-1}} + 2m$, де $m > 1$. Запишемо цю формулу для $m = 2, 3, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_2} &= \frac{1}{a_1} + 2\cdot 2,\\
\frac{1}{a_3} &= \frac{1}{a_2} + 2\cdot 3,\\
&\dots\\
\frac{1}{a_{n-1}} &= \frac{1}{a_{n-2}} + 2\cdot(n-1),\\
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_{n-1}} + 2\cdot n.
\end{aligned}$$

Додавши ці всі рівності, одержимо:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} =$$

$$= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + 2\left(2 + 3 + \dots + (n-1) + n\right),$$

$$\frac{1}{a_n} = 2\left(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\,n\right),$$

$$\frac{1}{a_n} = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Таким чином, $a_m = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$, для кожного натурального m. Звідси знаходимо, що

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1},$$

що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 6.24. *Послідовність натуральних чисел* (a_n) *визначається так:* $a_0 = a$ *— натуральне число і* $a_n = 5a_{n-1} + 4$, *для всіх натуральних* $n \geqslant 1$. *Чи можна вибрати число* a *таким, що* a_{54} *кратне* 2013?

(Міжнародна математична олімпіада країн Балтії, 2013 р.)

Розв'язання. *Перший спосіб.* Нехай $x_n = \frac{a_n}{5^n}$, де $n \geqslant 0$. Тоді $x_0 = a$ і $5^n x_n = a_n = 5a_{n-1} + 4 = 5^n x_{n-1} + 4$. Звідки знаходимо, що $x_n = x_{n-1} + \frac{4}{5^n}$, де $n \geqslant 1$. Далі, використовуючи *метод математичної індукції*, доводимо, що $x_n = a + 1 - \frac{1}{5^n}$, при всіх $n \geqslant 0$. *База індукції.* При $n = 0$ одержуємо: $x_0 = a = a + 1 - \frac{1}{5^0}$. *Крок індукції.* Припустимо, що для деякого $n = k - 1$ виконується рівність $x_{k-1} = a + 1 - \frac{1}{5^{k-1}}$. Доведемо, використовуючи припущення, що $x_k = a + 1 - \frac{1}{5^k}$. Дійсно,

$$x_k = x_{k-1} + \frac{4}{5^k} = a + 1 - \frac{1}{5^{k-1}} + \frac{4}{5^k} = a + 1 - \frac{5}{5^k} + \frac{4}{5^k} = a + 1 - \frac{1}{5^k}.$$

Таким чином, за основним принципом математичної індукції, ми робимо висновок, що $x_n = a + 1 - \frac{1}{5^n}$, при всіх $n \geqslant 0$. Звідси слідує, що $a_n = 5^n x_n = 5^n (a+1) - 1$, при всіх $n \geqslant 0$. Це означає, що $a_{54} = 5^{54}(a+1) - 1$. Нехай b — остача від ділення 5^{54} на 2013, $0 < b < 2013$, тоді $5^{54} = 2013c + b$, де c — деяке натуральне число. Оскільки 5^{54} взаємно просте з 2013, то 2013 і b — взаємно прості. Щоб довести, що a_{54} кратне 2013, досить знайти ціле y, для якого $(a+1)\,b - 1 = 2013y$. Це лінійне рівняння відносно $a + 1$ та y:

$$b\,(a+1) - 2013y = 1.$$

Оскільки b і 2013 — взаємно прості, то таке рівняння має нескінченне сімейство розв'язків. Серед них є таке, що $a + 1 \geqslant 2$. Саме це значення a і є шуканим.

Другий спосіб. Позначимо $f(x) = 5x + 4$. Ця функція є взаємно однозначною і для лишків за mod 2013 має обернену $g(x) = 1208x + 1207$. Дійсно,

$$a_n = 5a_{n-1} + 4,$$
$$5a_{n-1} = a_n - 4.$$

Тому

$$5a_{n-1} = a_n - 4 \equiv 6040a_n + 6035 \pmod{2013},$$

тобто $5a_{n-1} \equiv 6040a_n + 6035 \pmod{2013}$. Оскільки 5 і 2013 — взаємно прості, то після скорочення на 5, одержимо, що $a_{n-1} \equiv 1208a_n + 1207$.

Далі, можна легко перевірити, що $f(g(x)) \equiv x \pmod{2013}$ і $g(f(x)) \equiv x \pmod{2013}$. Позначимо $f^0(x) = x$ і $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$ для кожного натурального n, тобто $f^n(x)$ це n-кратне застосування функції f до x. Зрозуміло, що $a_1 = f(a)$, $a_2 = f(f(a))$, $a_3 = f(f(f(a)))$, $\ldots$, $a_{54} = f^{54}(a)$. Покладемо $a = g^n(0)$, тобто $a = \underbrace{g(\ldots g(g(0))\ldots)}_{54\text{ разів}}$. Зрозуміло, що a є натуральним. Тому, використовуючи $f(g(x)) \equiv x \pmod{2013}$, одержимо: $a_{54} = f^{54}(a) = f^{54}\left(g^{54}(0)\right) \equiv f^{53}\left(g^{53}(0)\right) \equiv \ldots \equiv f(g(0)) \equiv 0 \pmod{2013}$, що і завершує розв'язання задачі.

Відповідь. Таке a існує. □

Задача 6.25. *Послідовність $\{a_n\}$ дійсних чисел визначається наступним чином: $a_1 = 1$ і $a_{n+1} = \left(1+\frac{k}{n}\right)a_n + 1$, для всіх натуральних n. Знайдіть усі натуральні k такі, що для кожного із них число a_n буде цілим числом, при будь-якому натуральному n.*

(Математична олімпіада Північного Китаю, 2013 р.)

Розв'язання. Якщо $k=1$, то $a_1 = 1$ і $a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n + 1$, $n \geqslant 1$. Тоді, $a_2 = (1+1)\,a_1 + 1 = 3$, $a_3 = \left(1+\frac{1}{2}\right)a_2 + 1 = \frac{3}{2}\cdot 3 + 1 = 5{,}5$ — не є цілим числом. Тому, $k=1$ не задовольняє умові задачі.

Якщо $k>1$, то, використовуючи умову, знаходимо:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = \left(1+\frac{k}{1}\right)a_1 + 1 = k+2,$$

$$a_3 = \left(1+\frac{k}{2}\right)a_2 + 1 = \frac{k^2+4k+6}{2},\ldots$$

Виникає гіпотеза:

$$a_{n+1} = \frac{k}{k-1}\cdot C_{k+n}^{k} - \frac{n+1}{k-1}$$

для всіх натуральних n. Справедливість цієї гіпотези доведемо *методом математичної індукції*.

База індукції. При $n=1$ маємо:

$$a_2 = \frac{k}{k-1}C_{k+1}^{k} - \frac{2}{k-1} = \frac{k}{k-1}C_{k+1}^{1} - \frac{2}{k-1} = \frac{k\,(k+1)-2}{k-1} = k+2,$$

що і завершує доведення.

Крок індукції. Нехай гіпотеза справедлива для деякого натурального i, тобто $a_{i+1} = \frac{k}{k-1}C_{k+i}^{k} - \frac{i+1}{k-1}$.

Доведемо, використовуючи це припущення, що гіпотеза буде справедливою і для $n = i+1$, тобто $a_{i+2} = \frac{k}{k-1}C_{k+i+1}^{k} - \frac{i+2}{k-1}$. Дійсно,

$$a_{i+2} = \left(1+\frac{k}{i+1}\right)a_{i+1} + 1 = \frac{k+i+1}{i+1}\left(\frac{k}{k-1}C_{k+i}^{k} - \frac{i+1}{k-1}\right) + 1 =$$

$$= \frac{k}{k-1}\cdot\frac{k+i+1}{i+1}\cdot C_{k+i}^{k} - \frac{k+i+1}{k-1} + 1 =$$

$$= \frac{k}{k-1}\cdot\frac{k+i+1}{i+1}\cdot\frac{(k+i)!}{k!\cdot i!} - \frac{k+i+1-(k-1)}{k-1} =$$

$$= \frac{k}{k-1}\cdot\frac{(k+i+1)!}{k!\cdot(i+1)!} - \frac{i+2}{k-1} =$$

$$= \frac{k}{k-1}\cdot C_{k+i+1}^{k} - \frac{i+2}{k-1},$$

що і завершує доведення.

Таким чином, за основним принципом математичної індукції, для заданого $k > 1$ і будь-якого натурального n виконується рівність:

$$a_{n+1} = \frac{k}{k-1} \cdot C_{k+n}^{k} - \frac{n+1}{k-1}.$$

А тепер продовжимо розв'язання нашої задачі. При $k = 2$, одержимо:

$$a_{n+1} = \frac{2}{2-1} \cdot C_{n+2}^{2} - \frac{n+1}{2-1} = 2 \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} - (n+1) =$$
$$= (n+2)(n+1) - (n+1) = (n+1)(n+2-1) = (n+1)^2.$$

Враховуючи, що $a_1 = 1$ і $a_{n+1} = (n+1)^2$, для будь-якого натурального n, одержуємо, що при $k = 2$, число a_n буде цілим, при будь-якому натуральному n.

При $k > 2$ обчислимо a_{n+1} при $n = (k-1)(k-1)! - 2$. Матимемо:

$$a_{n+1} = \frac{k}{k-1} C_{n+k}^{k} - \frac{n+1}{k-1} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{(n+k)!}{k! \cdot n!} - \frac{n+1}{k-1} =$$
$$= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!} - \frac{n+1}{k-1} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{(k-1)\cdot(k-1)!} - \frac{n+1}{k-1} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{n+2} - \frac{n+1}{k-1} =$$
$$= (n+1)(n+3)\dots(n+k) - \frac{n+1}{k-1}.$$

Оскільки $(n+1)(n+3)\dots(n+k)$ — ціле число, то достатньо довести, що $\frac{n+1}{k-1}$ не є цілим, не забуваючи, що $n = (k-1)(k-1)! - 2$.

Доведемо, що дріб $\frac{n+1}{k-1}$ — нескоротний. Для цього, скористаємося відомою властивістю найбільшого спільного дільника двох цілих чисел: $(a, b) = (a-b, b)$, при $a > b$. Тому, застосувавши цю формулу $(k-1)!$ разів одержимо:

$$\text{НСД}(n+1, k-1) = \text{НСД}((k-1)\cdot(k-1)! - 1, k-1) = \dots =$$
$$= \text{НСД}(-1, k-1) = 1,$$

що і завершує розв'язання.

Відповідь. $k = 2$. □

Задача 6.26. *Послідовність (a_n) дійсних чисел визначається у такий спосіб: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ і для всіх натуральних n виконується рівність*

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n - \frac{n-2}{n^2+1} a_{n-1}.$$

Обчисліть значення виразу

$$\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}-\frac{a_4}{a_5}+\ldots+\frac{a_{2013}}{a_{2014}}-\frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$$

(Міжнародна математична олімпіада країн Центральної Америки, 2015 р.)

Розв’язання. Знайшовши кілька початкових членів нашої послідовності, помічаємо, що $\frac{a_n}{a_{n+1}}=n+1$. За допомогою *методу математичної індукції*, доведемо, що $\frac{a_{n-1}}{a_n}=n$ для всіх натуральних n.

База індукції. Для $n=1$ одержуємо: $\frac{a_0}{a_1}=\frac{1}{1}=1$.

Крок індукції. Нехай для деякого натурального n відношення $\frac{a_{n-1}}{a_n}=n$. Доведемо, використовуючи це припущення і означення послідовності, що відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}=n+1$. Дійсно,

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{n-1}{n+1}a_n-\frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}=\\&=\frac{n-1}{n+1}a_n-\frac{n-2}{n^2+n}\cdot na_n=\left(\frac{n-1}{n+1}-\frac{n-2}{n+1}\right)a_n=\frac{1}{n+1}\cdot a_n,\end{aligned}$$

тобто $\frac{a_n}{a_{n+1}}=n+1$, що і завершує доведення кроку.

Таким чином, за основним принципом математичної індукції, для кожного натурального n виконується співвідношення: $\frac{a_{n-1}}{a_n}=n$.

А тепер переходимо до обчислення потрібної суми:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}-\frac{a_4}{a_5}+\ldots+\frac{a_{2013}}{a_{2014}}-\frac{a_{2014}}{a_{2015}}&=2-3+4-5+\ldots+2014-2015=\\&=(2-3)+(4-5)+\ldots+(2014-2015)=\\&=\underbrace{-1-1-\ldots-1}_{2014:2}=-1007.\end{aligned}$$

Відповідь. -1007. $\square$

Задача 6.27. *За даним натуральним числом a_0 будується послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ наступним чином: $a_{n+1}=a_n^2-5$, якщо a_n — непарне число, і $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$, якщо a_n — парне число. Доведіть, що при непарному $a_0>5$ виконується нерівність $a_{3n}\geqslant n$, для всіх натуральних n.*

(Математична олімпіада Росії, 2000 р.)

Розв’язання. Доведемо, що в заданій послідовності кожне непарне число більше попереднього непарного числа. Нехай a_n — непарне число, тобто $a_n=2k+1$, де k — натуральне, $k>2$. Тоді $a_{n+1}=(2k+1)^2-5=4k^2+4k-4$. Оскільки a_{n+1} — парне, то

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{2}=2k^2+2k-2.$$

Оскільки a_{n+2} — парне, то $a_{n+3} = k^2+k-1$. Оскільки $k^2+k-1 = k(k+1)-1$ — непарне число і, оскільки $k > 2$, то $a_{n+3} = k^2 + k - 1 > 2k + 1 = a_n$. Таким чином ми довели, що

$$a_0 < a_3 < a_6 < \ldots < a_{3m},$$

а тому при всіх $n \geqslant 0$, індукцією по n, доводимо: $a_{3n} \geqslant n$. □

Задача 6.28. *Знайдіть усі послідовності (a_n) натуральних чисел, які для будь-якого натурального n задовольняють подвійну нерівність*

$$(n-1)^2 < a_n \cdot a_{a_n} < n^2 + n$$

(Математична олімпіада Канади, 2015 р.)

Розв'язання. Нехай (a_n) — це така послідовність натуральних чисел, для усіх членів якої виконується умова задачі. Тоді, для $n = 1$ одержуємо, що

$$0 < a_1 \cdot a_{a_1} < 2.$$

Оскільки a_1 і a_{a_1} — натуральні числа, то їх добуток $a_1 \cdot a_{a_1}$ — також натуральне число із проміжку $(0;2)$. Тому $a_1 \cdot a_{a_1} = 1$. Звідки слідує, що $a_1 = 1$. Далі, використовуючи *метод математичної індукції*, доведемо, що $a_n = n$, для кожного натурального n.

База індукції. Для $n = 1$ ми довели, що $a_1 = 1$.

Крок індукції. Припустимо, що $a_i = i$, для всіх натуральних $i < k$, де k деяке натуральне число, $k > 1$. Доведемо, використовуючи припущення, що $a_k = k$. Дійсно, за умовою задачі, $a_k \cdot a_{a_k} > (k-1)^2$. Припустимо, що $a_k < k$, тоді за припущенням індукції $a_{a_k} = a_k$. А тому, $a_k^2 = a_k \cdot a_k = a_k \cdot a_{a_k} > (k-1)^2$, тобто $a_k > k-1$. Тому, для цього випадку, одержали, що $k-1 < a_k < k$, що неможливо, бо не існує цілого числа, яке б знаходилося між двома послідовними цілими числами. Припустимо, що $a_k > k$. За умовою задачі, $a_k \cdot a_{a_k} < k^2 + k = k(k+1)$. Оскільки $a_k \geqslant k+1$, то

$$(k+1) \cdot a_{a_k} \leqslant a_k \cdot a_{a_k} < k(k+1).$$

Звідси слідує, що $a_{a_k} < k$. Тому,

$$a_{a_{a_k}} = a_{a_k} \text{ i } a_{a_k} \cdot a_{a_{a_k}} = a_{a_k} \cdot a_{a_k} = {a_{a_k}}^2 < k^2 \leqslant (a_k-1)^2,$$

тобто $a_{a_k} \cdot a_{a_{a_k}} < (a_k-1)^2$, що суперечить умові задачі (бо коли позначити $a_k = m$, одержуємо, що $a_m \cdot a_{a_m} < (m-1)^2$). Одержане, у цьому випадку, протиріччя і доводить, що неможлива нерівність $a_k > k$. Оскільки неможливі нерівності $a_k < k$ і $a_k > k$, то виконується рівність $a_k = k$, що і завершує доведення кроку.

Таким чином, за основним принципом математичної індукції, одержуємо, що $a_n = n$, для кожного натурального n.

Відповідь. $a_n = n$, для кожного натурального n. $\square$

Задача 6.29. *Знайти усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для кожного із яких виконується рівність*

$$\left(x^2-6x+8\right)\cdot P(x)=\left(x^2+2x\right)\cdot P(x-2)$$

для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

(Математична олімпіада Греції, 2014 р.)

Розв'язання. Перепишемо рівність з умови задачі у такому вигляді:

$$(x-2)(x-4)P(x)=x(x+2)P(x-2). \tag{6.22}$$

Покладемо в (6.22) $x=0$, одержимо, що $P(0)=0$. Крім цього, покладемо в (6.22) $x=-2$, одержимо, що $P(-2)=0$, а також покладемо $x=4$, одержимо, що $P(2)=0$. Це означає, що

$$P(x)=x(x+2)(x-2)Q(x),$$

де $Q(x)$ — деякий многочлен з дійсними коефіцієнтами. Тому, (6.22) перепишеться так

$$(x-2)(x-4)x(x+2)(x-2)Q(x)=x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2)$$

для всіх дійсних x. Після скорочення, одержимо, що

$$(x-2)Q(x)=xQ(x-2)$$

для всіх дійсних x, крім $x=0$, $x=\pm 2$, $x=4$. Звідси слідує, що

$$\frac{Q(x)}{x}=\frac{Q(x-2)}{x-2}.$$

Позначимо через $R(x)=\frac{Q(x)}{x}$, тоді остання рівність перепишеться так:

$$R(x)=R(x-2), \tag{6.23}$$

для всіх дійсних x, крім $x=0$, $x=\pm 2$, $x=4$.

Нехай $R(3)=c$, де c — деяке дійсне число, тоді покладаючи в (6.23) послідовно $x=5$, $x=7$, $x=9$, і т. д., одержимо, що $R(5)=c$, $R(7)=c$, $R(9)=c$, і т. д. Отже, із (6.23) слідує, що $R(x)$ приймає безліч однакових значень, які дорівнюють c. Оскільки $R(x)$ — дробово-раціональна функція, то $R(x)=c$, для всіх дійсних x. Таким чином, $Q(x)=cx$ і $P(x)=cx^2\left(x^2-4\right)$, де $c=\text{const}$. Безпосередня перевірка показує, що $P(x)=cx^2\left(x^2-4\right)$ — задовольняє умову задачі.

Відповідь. $P(x)=cx^2\left(x^2-4\right)$, де $c=\text{const}$, $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Задача 6.30. *Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють такі умови:*

$$P(2015) = 2025 \quad i \quad P(x) - 10 = \sqrt{P(x^2+3) - 13}$$

для кожного $x \geqslant 0$.

(Молдова, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2015 р.)

Розв'язання. Нехай $P(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами, який задовольняє умовам задачі. Будемо розглядати многочлен $Q(x) = P(x) - 10$, усі коефіцієнти якого — дійсні числа. Тоді, $Q(2015) = 2015$ і $Q(x) = \sqrt{Q(x^2+3) - 3}$ для кожного $x \geqslant 0$. Звідси слідує, що $Q(x)^2 + 3 = Q\left(x^2+3\right)$ для кожного $x \geqslant 0$.

Розглянемо множину: $A = \{x \,|\, Q(x) = x\}$. Зрозуміло, що множина A не є порожньою, бо $2015 \in A$ (це випливає, зо того, що $Q(2015) = 2015$). Доведемо наступне твердження: *якщо $a > 0$ і a належить множині A, то $a^2 + 3$ також належить A.*

Нехай $a > 0$ і $a \in A$, тоді, за означенням множини A, виконується рівність $Q(a) = a$. Тому, використовуючи умову, одержуємо, що $Q\left(a^2+3\right) = Q(a)^2 + 3 = a^2 + 3$, тобто $a^2 + 3$ належить множині A, що і завершує доведення цього твердження. Означимо послідовність натуральних чисел: $a_0 = 2015$ і $a_{i+1} = a_i^2 + 3$, для всіх $i = 0, 1, 2, \ldots$. Використовуючи *метод математичної індукції*, легко доводимо, що $a_i > 0$, $a_{i+1} > a_i$ та $Q(a_i) = a_i$ для кожного цілого невід'ємного i. Дійсно, крок індукції можна здійснити наступним чином. Нехай для деякого цілого невід'ємного k виконується рівність $Q(a_k) = a_k$. Доведемо, використовуючи припущення, що $Q(a_{k+1}) = a_{k+1}$. Дійсно, оскільки $Q(a_k) = a_k$, то $a_k \in A$. Тоді, за доведеним вище твердженням, $a_{k+1} = a_k^2 + 3$ також належить множині A. З того, що $a_{k+1} \in A$, за означенням множини A буде виконуватися рівність $Q(a_{k+1}) = a_{k+1}$, що і завершує доведення.

Оскільки всі a_i є коренями многочлена $R(x) = Q(x) - x$, бо $R(a_i) = Q(a_i) - a_i = 0$, і їх безліч, то $R(x) = 0$ при всіх дійсних x. А це означає, що $P(x) = x + 10$. Безпосередня перевірка показує, що знайдений многочлен є шуканим.

Відповідь. $P(x) = x + 10$. □

Задача 6.31. *Знайти усі такі функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ і $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що f — монотонно зростає і обидві задовольняють такі співвідношення:*

$$f(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = g(x) + 2f(x) + 3g(y)$$

і

$$g(f(x) + y + g(y)) = 2x - g(x) + f(y) + y$$

для будь-яких додатних дійсних чисел x та y.

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. Оскільки функція f — монотонно зростає, то функція $h(x) = f(x) + x$ — ін'єктивна (тобто відображає різні значення в різні) і також монотонно зростає. Справді, припустимо, що це не так. Тоді існують такі додатні a і b, що $a > b$ і $h(a) = h(b)$. Тоді $f(a) + a = f(b) + b$. Оскільки $a > b$, то з монотонності функції f випливає, що $f(a) > f(b)$, тобто $f(a) + a > f(b) + b$. Протиріччя. Отже, $h(x)$ монотонно зростає. Так як $f(x) = h(x) - x$, то із першого співвідношення одержуємо:

$$h(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) - f(x) - 2g(x) - 3f(y) = g(x) + 2f(x) + 3g(y),$$

тобто

$$h(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = 3f(x) + 3g(x) + 3f(y) + 3g(y) \tag{6.24}$$

для будь-яких додатних дійсних x та y. Помінявши у співвідношенні (6.24) x на y, а y на x, одержимо:

$$h(f(y) + 2g(y) + 3f(x)) = 3f(x) + 3g(x) + 3f(y) + 3g(y) \tag{6.25}$$

для будь-яких додатних дійсних x та y. Із співвідношень (6.24) і (6.25), одержуємо:

$$h(f(x) + 2g(x) + 3f(y)) = h(f(y) + 2g(y) + 3f(x)). \tag{6.26}$$

Оскільки $h(x)$ монотонна, то із (6.26) одержуємо:

$$f(x) + 2g(x) + 3f(y) = f(y) + 2g(y) + 3f(x).$$

Звідси випливає, що

$$f(x) - g(x) = f(y) - g(y) \tag{6.27}$$

для будь-яких додатних дійсних x та y. Співвідношення (6.27) означає, що

$$f(x) - g(x) = \lambda, \quad \text{де } \lambda = \text{const}. \tag{6.28}$$

Покладемо у друге співвідношення умови задачі $y = x$ і з урахуванням (6.28), одержимо:

$$g(f(x) + x + g(x)) = 3x + \lambda. \tag{6.29}$$

Оскільки значення функції g є додатними, то $3x + \lambda > 0$ при усіх додатних дійсних x. Ця нерівність буде виконуватися лише тоді, коли $\lambda \geqslant 0$. Тому, усі значення функції g будуть більшими за λ, а усі значення функції f будуть більшими за 2λ, де $\lambda \geqslant 0$. Далі, враховуючи (6.28), з першої умови задачі знаходимо, що

$$f(3f(x) + 3f(y) - 2\lambda) = 3f(x) + 3f(y) - 4\lambda,$$

тобто

$$f(t) = t - 2\lambda,$$

для усіх $t > 10\lambda$, бо

$$t = 3f(x) + 3f(y) - 2\lambda > 2 \cdot 2\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 2\lambda = 10\lambda.$$

Крім того,

$$g(t) = t - 3\lambda,$$

для усіх $t > 10\lambda$.

Розглянемо x достатньо великим, щоб x, $f(x)$ і $g(x)$ були більшими за 10λ, тоді із (6.29) одержуємо:

$$f(x) + x + g(x) - 3\lambda = 3x + \lambda,$$
$$x - 2\lambda + x + x - 3\lambda - 3\lambda = 3x + \lambda.$$

Звідки $\lambda = 0$. Отже, $f(x) = x$ і $g(x) = x$ при усіх додатних дійсних x. Безпосередня перевірка показує, що знайдені функції задовольняють усі вимоги задачі.

Відповідь. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Задача 6.32. *Нехай n — натуральне число, $n > 1$. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f(x - f(y)) = f(x + y^n) + f(f(y) + y^n)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Китай, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2011 р.)

Розв'язання. Нехай $f(0) = a$. Покладемо в умову замість x і y відповідно $f(x)$ і x, одержимо:

$$f(f(x) - f(x)) = f(f(x) + x^n) + f(f(x) + x^n),$$

тобто

$$f(f(x) + x^n) = \frac{a}{2}, \tag{6.30}$$

для будь-якого дійсного x. Звідси, зокрема, знаходимо: $f(a) = \frac{a}{2}$. Далі, покладемо в умову замість x і y відповідно x і 0, одержимо:

$$f(x - f(0)) = f(x) + f(f(0)),$$

тобто

$$f(x - a) = f(x) + \frac{a}{2}, \tag{6.31}$$

для будь-якого дійсного x. Далі, покладемо в (6.31) замість x відповідно $x-a$, одержимо:

$$f(x-2a)=f(x-a)+\frac{a}{2},$$

а, враховуючи знову (6.31), остаточно одержуємо:

$$f(x-2a)=f(x)+a, \tag{6.32}$$

для будь-якого дійсного x.

Далі, покладемо в умову замість x і y відповідно x і $y-2a$, одержимо:

$$f(x-f(y-2a))=f(x+(y-2a)^n)+f(f(y-2a)+(y-2a)^n).$$

Враховуючи співвідношення (6.30) і (6.32), одержуємо:

$$f(x-f(y)-a)=f(x+(y-2a)^n)+\frac{a}{2},$$

а, враховуючи співвідношення (6.31), одержуємо:

$$f(x-f(y))+\frac{a}{2}=f(x+(y-2a)^n)+\frac{a}{2},$$

тобто

$$f(x-f(y))=f(x+(y-2a)^n)$$

Далі, використовуючи співвідношення умови і співвідношення (6.30), одержуємо:

$$f(x+y^n)+\frac{a}{2}=f(x+(y-2a)^n),$$

а після використання співвідношення (6.31), одержуємо:

$$f(x+y^n-a)=f(x+(y-2a)^n), \tag{6.33}$$

для будь-яких дійсних x та y.

Якщо $a\neq 0$, то із (6.33) випливає, що f — стала функція і є тотожним нулем, що суперечить припущенню: $a\neq 0$.

Тому, $a=0$, то із (6.30) слідує, що

$$f(f(x)+x^n)=0 \tag{6.34}$$

і

$$f(x-f(y))=f(x+y^n) \tag{6.35}$$

для будь-яких дійсних x та y.

Якщо $f(x)+x^n=0$ для всіх дійсних x, то $f(x)=-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ — одна із шуканих функцій. Якщо $f(k)+k^n\neq 0$ для деякого дійсного k, то $k\neq 0$. Тоді із (6.35) випливає f — періодична функція. У цьому випадку,

$$f(x+y^n)=f(x-f(y))=f(x-f(y+l))=f(x+(y+k)^n),$$

тобто

$$f\left(x+y^n\right)=f\left(x+(y+k)^n\right)$$

для будь-яких дійсних x та y, та фіксованого $k \neq 0$. Покладаючи в останнє співвідношення замість x і y відповідно $-y^n$ і y, одержимо:

$$f\left((y+k)^n-y^n\right)=0,$$

для будь-якого дійсного y. Оскільки $(y-k)^n-y^n$ при всіх дійсних значеннях y пробігає усі дійсні значення, бо

$$(y-k)^n-y^n=k\left((y-k)^{n-1}+(y-k)^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}\right),$$

із останнього співвідношення випливає, що f — стала функція і є тотожним нулем. Безпосередня перевірка показує, що функція $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ також є розв'язком задачі.

Відповідь. $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ і $f(x)=-x^n$, $x\in\mathbb{R}$. □

Задача 6.33. *Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=f(x)^2+y$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Математична олімпіада Балканських країн, 2000 р.)

Розв'язання. Покладемо в умову замість x і y відповідно 0 і x, одержимо:

$$f\left(f(x)\right)=f(0)^2+x \tag{6.36}$$

для будь-якого дійсного x. Доведемо, що функція f кожного значення набуває не більше одного разу. Справді, припустимо, що існують такі дійсні числа a і b, для яких $a\neq b$ і $f(a)=f(b)$. Тоді $f(f(a))=f(f(b))$. За допомогою (6.36) одержуємо: $f(0)^2+a=f(0)^2+b$, тобто $a=b$. Протиріччя.

Нехай $f(0)=\lambda$, тоді (6.36) дає, що

$$f\left(f(x)\right)=x+\lambda^2 \tag{6.37}$$

для будь-якого дійсного x. Це означає, що існує таке дійсне μ, що $f(\mu)=0$ (наприклад, $\mu=f\left(-\lambda^2\right)$). Покладемо в умову замість x і y відповідно μ і x, одержимо:

$$f\left(f(x)\right)=x \tag{6.38}$$

для будь-якого дійсного x. Із співвідношень (6.37) і (6.38) слідує, що $\lambda=0$ і $\mu=0$.

Таким чином, $f(0)=0$ і $f(f(x))=x$ для будь-якого дійсного x. Далі, покладемо в умову замість x і y відповідно $f(x)$ і y, одержимо:

$$f\left(f(x)\cdot f(f(x))+f(y)\right)=f(f(x))^2+y,$$

$$f\left(f(x)\cdot x+f(y)\right)=x^2+y,$$

тобто

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=x^2+y$$

для будь-яких дійсних x і y. Порівнюючи одержане співвідношення із співвідношенням умови, одержимо:

$$f(x)^2=x^2 \tag{6.39}$$

для будь-якого дійсного x.

Співвідношення (6.39) означає, що для кожного дійсного x: або $f(x)=x$, або $f(x)=-x$. Припустимо, що існують такі дійсні a і b, для яких $f(a)=-a$ і $f(b)=b$, причому $a\neq 0$, $b\neq 0$ і $a\neq b$. Покладемо в умову замість x і y відповідно a і b, одержимо:

$$f\left(af(a)+f(b)\right)=f(a)^2+b,$$

тобто

$$f\left(-a^2+b\right)=a^2+b.$$

Звідси одержуємо, що

$$-a^2+b=a^2+b \ \text{ або } \ -\left(-a^2+b\right)=a^2+b.$$

Із першої рівності знаходимо, що $a=0$, а із другої знаходимо, що $b=0$. Обидві приводять до протиріччя. Таким чином, $f(x)=x$ для всіх дійсних x, відмінних від нуля, і $f(x)=-x$ для всіх дійсних x, відмінних від нуля. Оскільки $f(0)=0$, то шуканими функціями можуть бути лише такі: $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ і $f(x)=-x$, $x\in\mathbb{R}$. Безпосередня перевірка показує, що ці обидві функції задовольняють умову задачі.

Відповідь. $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ і $f(x)=-x$, $x\in\mathbb{R}$. □

Задача 6.34. *Знайти усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf(x)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Іран, 1999 р.)

Розв'язання. Покладемо в умову замість x і y відповідно x і x^2, одержимо:

$$f\left(f(x)+x^2\right)=f(0)+4x^2f(x) \tag{6.40}$$

для будь-яких дійсних x. Далі, покладемо в умову замість x і y відповідно x і $-f(x)$, одержимо:

$$f(0)=f\left(x^2+f(x)\right)+4(-f(x))f(x) \tag{6.41}$$

для будь-яких дійсних x. Виключаючи із (6.40) і (6.41) значення $f(0)$, одержуємо:

$$f\left(f(x)+x^2\right)-4x^2f(x)=f\left(f(x)+x^2\right)-4f(x)^2.$$

Звідки

$$f(x)\left(f(x)-x^2\right)=0 \tag{6.42}$$

для будь-яких дійсних x. Із співвідношення (6.42) випливає, що для кожного дійсного x:

$$\text{або } f(x)=0, \text{ або } f(x)=x^2. \tag{6.43}$$

Припустимо, що існують такі дійсні a і b, для яких $f(a)=0$ і $f(b)=b^2$, причому $a\neq 0$, $b\neq 0$ і $a\neq b$. Покладемо в умову замість x і y відповідно a і b, одержимо:

$$f(f(a)+b)=f\left(a^2-b\right)+4bf(a),$$

тобто $b^2=f\left(a^2-b\right)$. Враховуючи (6.43) одержуємо, що або $b^2=0$, або $b^2=\left(a^2-b\right)^2$.

Оскільки $b\neq 0$, то перша рівність неможлива. Тому, враховуючи, що $a\neq 0$ і $b\neq 0$, матимемо:

$$b^2=\left(a^2-b\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad b^2=a^4-2a^2b+b^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$a^4-2a^2b=0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2-2b=0 \quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{a^2}{2}.$$

Оскільки $b\neq a$, $a\neq 0$ і $b\neq 0$, то $\frac{a^2}{2}\neq a$, тобто $a\neq 2$.

Розглянемо число $c\notin\left\{0,a,-a,\frac{a^2}{2}\right\}$. Якщо $f(c)=0$, то покладемо в умову замість x і y відповідно c і b, одержимо:

$$f(f(c)+b)=f\left(c^2-b\right)+4bf(c),$$

тобто

$$b^2=f\left(c^2-b\right).$$

Оскільки $b\neq 0$, то $b^2=\left(c^2-b\right)^2$, тобто $b=\frac{c^2}{2}$, а так як $b=\frac{a^2}{2}$, то $c=\pm a$, що неможливо. Якщо $f(c)=c^2$, то покладемо в умову замість x і y відповідно a і c, одержимо:

$$f(f(a)+c)=f\left(a^2-c\right)+4cf(a),$$

тобто

$$c^2=f\left(a^2-c\right).$$

Оскільки $c\neq 0$, то $c^2=\left(a^2-c\right)^2$, тобто $c=\frac{a^2}{2}$, що неможливо.

Одержані скрізь протиріччя дають, що: або $f(x) = 0$ для усіх дійсних $x \neq 0$, або $f(x) = x^2$ для усіх дійсних $x \neq 0$. Оскільки $f(0) = 0$, то шуканими функціями можуть бути лише такі: $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, і $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Безпосередня перевірка показує, що ці функції задовольняють умову задачі.

Відповідь. $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, і $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. □

Задача 6.35. *Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right)$$

для будь-яких дійсних x та y.

(Аргентина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2010 р.)

Розв'язання. Спочатку покажемо, що шукана функція f не є сталою. Припустимо, що $f(x) = \lambda$, тоді із умови одержуємо:

$$\lambda = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2,$$

тобто $\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$, що неможливо для будь-якого дійсного λ. Одержане протиріччя і доводить, що шукана функція f не є сталою.

Покладемо в умову замість x і y відповідно x і -1, одержимо:

$$f(x - x + f(-1)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(-1) + \frac{1}{2}\right),$$

тобто

$$f(f(-1)) = \left(f(-1) + \frac{1}{2}\right)\left(f(x) + \frac{1}{2}\right)$$

для будь-якого дійсного x. Якщо $f(-1) + \frac{1}{2} \neq 0$, то із останнього співвідношення випливає, що функція f буде сталою, що неможливо. Тому, $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Далі, припустимо, що для деякого дійсного a, відмінного від -1, виконується рівність: $f(a) = -\frac{1}{2}$. Покладемо в умову замість x та y відповідно x і a, одержимо:

$$f(x + ax + f(a)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(a) + \frac{1}{2}\right).$$

Оскільки $f(a) = -\frac{1}{2}$, то $f\left((a+1)x - \frac{1}{2}\right) = 0$ для будь-якого дійсного x. Оскільки $a \neq -1$, то вираз $(a+1)x - \frac{1}{2}$ пробігає усі дійсні числа, тобто, у цьому випадку функція f буде тотожним нулем, що неможливо. Тому, функція f приймає значення $-\frac{1}{2}$ лише для аргумента, який дорівнює -1, тобто

$$f(a) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -1. \qquad (6.44)$$

Далі, покладемо в умову замість x і y відповідно -1 і x, одержимо:

$$f(-1-x+f(x)) = \left(f(-1)+\frac{1}{2}\right)\left(f(x)+\frac{1}{2}\right).$$

Оскільки $f(-1) = -\frac{1}{2}$, то одержуємо, що

$$f(-1-x+f(x)) = 0 \tag{6.45}$$

для будь-яких дійсних x. Покладемо в (6.45) замість x відповідно $-1-x+f(x)$, одержимо:

$$f(-1-(-1-x+f(x))+f(-1-x+f(x))) = 0.$$

Враховуючи (6.45), одержуємо:

$$f(x-f(x)) = 0 \tag{6.46}$$

для будь-яких дійсних x.

Далі, покладемо в умову задачі замість x і y відповідно $\frac{x-2f(x)}{x+1}$, $x \neq -1$ і x, одержимо:

$$f\left(\frac{x-2f(x)}{x+1} + \frac{x-2f(x)}{x+1}\cdot x + f(x)\right) = \left(f\left(\frac{x-2f(x)}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f(x)+\frac{1}{2}\right),$$

тобто

$$f(x-f(x)) = \left(f\left(\frac{x-2f(x)}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f(x)+\frac{1}{2}\right).$$

Використовуючи (6.46), одержимо:

$$\left(f\left(\frac{x-2f(x)}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\right)\left(f(x)+\frac{1}{2}\right) = 0$$

для усіх дійсних $x \neq -1$. Якщо $f(x)+\frac{1}{2} = 0$, то $f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$, що суперечить умові $x \neq -1$.

Тому,

$$f\left(\frac{x-2f(x)}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}$$

для усіх дійсних $x \neq -1$. Використовуючи (6.44), знаходимо, що

$$\frac{x-2f(x)}{x+1} = -1,$$

для усіх дійсних $x \neq -1$. Звідки знаходимо, що $f(x) = x+\frac{1}{2}$ для усіх дійсних $x \neq -1$. Оскільки $f(-1) = -\frac{1}{2}$, то $f(x) = x+\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Відповідь. $f(x) = x+\frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Задача 6.36. *Знайдіть усі сюр'єктивні функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, для яких виконується співвідношення*

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

для будь-яких дійсних x *і* y.

(Іран, 2011 р.)

Розв'язання. Оскільки f — сюр'єктивна, то існує таке дійсне число t, для якого $f(t) = 0$. Покладемо в умову задачі замість x і y відповідно t і t, одержимо:

$$f(t + f(t) + 2f(t)) = f(2t) + f(2t),$$

тобто

$$f(2t) = 0.$$

Далі, покладемо в умову задачі замість x і y відповідно 0 і x, одержимо:

$$f(f(0) + 2f(x)) = f(0) + f(2x), \tag{6.47}$$

для будь-якого дійсного x.

Далі, покладемо в умову задачі замість x і y відповідно t і x, одержимо: $f(t + f(t) + 2f(x)) = f(2t) + f(2x)$, а враховуючи, що $f(t) = 0$ і $f(2t) = 0$, одержуємо:

$$f(t + 2f(x)) = f(2x) \tag{6.48}$$

для будь-якого дійсного x.

Знайшовши різницю (6.47) і (6.48), одержуємо:

$$f(f(0) + 2f(x)) - f(t + 2f(x)) = f(0) \tag{6.49}$$

для будь-якого дійсного x.

Оскільки f — сюр'єктивна функція, то $2f(x)$ набуває усіх дійсних значень. Покладемо в (6.49) замість $f(x)$ відповідно x, одержимо:

$$f(f(0) + x) - f(t + x) = f(0) \tag{6.50}$$

для будь-якого дійсного x.

Далі, покладемо в (6.50) замість x відповідно t, одержимо:

$$f(f(0) + t) - f(2t) = f(0).$$

Так як $f(2t) = 0$, то

$$f(f(0) + t) = f(0). \tag{6.51}$$

Покладемо в (6.50) замість x відповідно 0, одержимо:

$$f(f(0)) - f(t) = f(0).$$

Оскільки $f(t) = 0$, то
$$f(f(0)) = f(0). \tag{6.52}$$
Далі, покладемо в (6.50) замість x відповідно $f(0)$, одержимо:
$$f(2f(0)) - f(t + f(0)) = f(0).$$
Враховуючи (6.51), одержимо:
$$f(2f(0)) = 2f(0). \tag{6.53}$$
Далі, покладемо в умову задачі замість x і y відповідно 0 і 0, одержимо:
$$f(f(0) + 2f(0)) = f(0) + f(0),$$
тобто
$$f(3f(0)) = 2f(0). \tag{6.54}$$
Знову покладемо в умову задачі замість x і y відповідно 0 і $f(0)$, одержимо:
$$f(f(0) + 2f(f(0))) = f(0) + f(2f(0)),$$
$$f(f(0) + 2f(0)) = f(0) + 2f(0),$$
тобто
$$f(3f(0)) = 3f(0). \tag{6.55}$$
Із (6.54) і (6.55) випливає, що $2f(0) = 3f(0)$, тобто $f(0) = 0$.

Тепер, знову покладемо в умову задачі замість x і y відповідно 0 і x, одержимо:
$$f(0 + f(0) + 2f(x)) = f(0) + f(2x),$$
тобто $f(2f(x)) = f(2x)$ для будь-якого дійсного x. Тому, співвідношення умови задачі можна переписати так:
$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2f(y))$$
для будь-яких дійсних x і y. Оскільки f — сюр'єктивна функція, то $2f(y)$ пробігає усі дійсні числа. Тому в останньому співвідношенні замість $2f(y)$ запишемо просто y. Одержимо таке нове співвідношення для шуканої функції f:
$$f(x + f(x) + y) = f(2x) + f(y) \tag{6.56}$$
для будь-яких дійсних x і y. Покладемо в (6.56) замість x і y відповідно x і 0, одержимо:
$$f(x + f(x)) = f(2x) \tag{6.57}$$
для будь-якого дійсного x.

Далі, будемо перетворювати вираз $f(x+f(x)+y)$, використовуючи (6.56), (6.57) і підстановки

$$y = f(x+f(x)) = f(2x). \tag{6.58}$$

Матимемо:

а)

$$f(x+f(x)+y) \overset{(6.58)}{=} f(x+f(x)+f(x+f(x))) \overset{(6.57)}{=} f(2(x+f(x))) =$$
$$= f(x+f(x)+(x+f(x))) \overset{(6.56)}{=} f(2x)+f(x+f(x)) \overset{(11)}{=}$$
$$\overset{(6.57)}{=} f(2x)+f(2x) = 2f(2x).$$

б)

$$f(x+f(x)+y) \overset{(6.58)}{=} f(x+f(x)+f(2x)) \overset{(6.56)}{=} f(2x)+f(f(2x)).$$

Із *а)* і *б)* одержуємо, що $f(2x)+f(f(2x)) = 2f(2x)$, тобто $f(f(2x)) = f(2x)$ при будь-якому дійсному x. Оскільки f — сюр'єктивна функція, то $f(2x)$ пробігає усі дійсні числа. Тому, в останньому співвідношенні замість $f(2x)$ запишемо просто x. Одержимо таке нове співвідношення для шуканої функції f:

$$f(x) = x$$

для будь-якого дійсного x. Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція задовольняє умову задачі. □

Задача 6.37. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:*

$$|f(x)| \leqslant 1 \quad i \quad f(x)+f\left(x+\frac{5}{6}\right) = f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

для кожного дійсного числа x. Доведіть, що f є періодичною функцією.

(Польща, 2012 р.)

Розв'язання. Визначимо функції g і h за допомогою таких співвідношень:

$$g(x) = f(x) - f\left(x+\frac{1}{3}\right) \text{ і } h(x) = f(x) - f(x+1)$$

для кожного дійсного числа x. Тоді рівність, що вказана в умові задачі, може переписатися так: $g(x) = g\left(x+\frac{1}{2}\right)$ для кожного дійсного числа x. Звідси випливає, що функція g є періодичною, а число $\frac{1}{2}$ і тим більше число 1 — це довжина її періоду, бо з умови $g(x) = g\left(x+\frac{1}{2}\right)$ випливає, що $g\left(x+\frac{1}{2}\right) = g\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) = g(x+1)$ для кожного дійсного числа x. Таким чином, використовуючи наші означення, матимемо, що

$$h(x) = g(x) + g\left(x+\frac{1}{3}\right) + g\left(x+\frac{2}{3}\right),$$

тобто

$$h(x+1) = g(x+1) + g\left((x+1)+\frac{1}{3}\right) + g\left((x+1)+\frac{2}{3}\right) =$$
$$= g(x+1) + g\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)+1\right) + g\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)+1\right) =$$
$$= g(x) + g\left(x+\frac{1}{3}\right) + g\left(x+\frac{2}{3}\right) = h(x)$$

для кожного дійсного числа x. А це означає, що функція h також періодична функція з довжиною періоду, що дорівнює 1. Зафіксуємо тепер число x і позначимо $c = h(x)$. Тоді

$$h(x+1) = h(x+2) = \ldots = h(x+n-1) = c$$

для довільного натурального n. Тому

$$f(x) - f(x+n) = h(x) + h(x+1) + h(x+2) + \ldots + h(x+n-1) = nc. \quad (6.59)$$

На підставі першої умови задачі $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ і $-1 \leqslant f(x+n) \leqslant 1$, тому $-2 \leqslant f(x) - f(x+n) \leqslant 2$. Тому, із (6.59) одержуємо, що $-2 \leqslant nc \leqslant 2$. Якщо $c \neq 0$, то $-\frac{2}{c} \leqslant n \leqslant \frac{2}{c}$, для будь-якого натурального n. Оскільки для достатньо великих n нерівність $-\frac{2}{c} \leqslant n \leqslant \frac{2}{c}$ не справджується, то $c = 0$. Це означає, що $f(x) - f(x+1) = h(x) = 0$, тобто $f(x) = f(x+1)$. Оскільки число x було вибране довільним, то $f(x) = f(x+1)$ для кожного дійсного числа. А це означає, що f — періодична функція, з довжиною періоду, що дорівнює 1. Цим і завершується розв'язання задачі. □

Задача 6.38. *Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких виконується співвідношення*

$$f(x+f(y)) - f(x) = (x+f(y))^4 - x^4$$

для будь-яких дійсних x і y.

(Міжнародна математична олімпіада Чехії, Польщі і Словаччини, 2012 р.)

Розв'язання. Легко перевірити, що коли f — тотожній нуль, то співвідношення умови задачі виконується для будь-яких дійсних x і y. Припустимо, що функція f не є тотожнім нулем і задовольняє співвідношення в умові задачі. Тоді, існує таке дійсне число a, що $b = f(a) \neq 0$. Означимо нову функцію $g(x) = f(x+b) - f(x)$ для будь-якого дійсного x. Використовуючи умову задачі, одержимо, що

$$g(x) = f(x+f(a)) - f(x) = (x+f(a))^4 - x^4 =$$
$$= (x+b)^4 - x^4 = 4bx^3 + 6bx^2 + 4b^3x + b^4,$$

тобто $g(x)$ є многочленом третього степеня, а тому його значення пробігають усі дійсні числа. Нехай z — будь-яке дійсне число, тоді $z = g(w)$ для деякого дійсного w, причому $f(w+b) - f(w) = z$. Покладемо в умову замість x і y відповідно $-f(w)$ і $w+b$, одержимо:

$$f(-f(w)+f(w+b))-f(-f(w)) = (-f(w)+f(w+b))^4-(-f(w))^4,$$

тобто

$$f(z)-f(-f(w)) = z^4-(-f(w))^4. \tag{6.60}$$

Далі, покладемо в умову замість x і y відповідно $-f(w)$ і w, одержимо:

$$f(-f(w)+f(w))-f(-f(w)) = (-f(w)-f(w))^4-(-f(w))^4,$$

тобто

$$f(0)-f(-f(w)) = -(-f(w))^4. \tag{6.61}$$

Розглянемо різницю (6.60) і (6.61), одержимо:

$$f(z)-f(0) = z^4,$$

тобто $f(z) = z^4 + f(0)$, для будь-якого дійсного z. Залишилося перевірити, що $f(x) = x^4 + \lambda$, де $\lambda = const$, задовольняє умову задачі.

Відповідь. $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ і $f(x) = x^4 + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda = const$. □

Задача 6.39. *Знайдіть усі такі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, що для будь-яких* $x \in \mathbb{R}$ *і* $y \in \mathbb{R}$ *виконується рівність*

$$f(x+2^y) = f(x)+2^{f(y)}.$$

(Україна, фінал Турніру юних математиків, 2013 р.)

Розв'язання. Використовуючи умову, індукцією по $k \geqslant 1$, дістанемо, що рівність

$$f(x+k\cdot 2^y) = f(x)+k\cdot 2^{f(y)}$$

виконується при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та всіх $k \in \mathbb{N}$. Дійсно, при $k = 1$ одержуємо рівність умови задачі. Припустимо, що рівність

$$f(x+k\cdot 2^y) = f(x)+k\cdot 2^{f(y)}$$

виконується при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та деякому $k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що тоді виконується і така рівність

$$f(x+(k+1)\cdot 2^y) = f(x)+(k+1)\cdot 2^{f(y)}.$$

Дійсно,

$$f(x+(k+1)\cdot 2^y) = f((x+2^y)+k\cdot 2^y) = f(x+2^y)+k\cdot 2^{f(y)} =$$

$$= f(x) + 2^{f(y)} + k \cdot 2^{f(y)} = f(x) + (k+1) \cdot 2^{f(y)}.$$

Отже, за принципом математичної індукції, робимо висновок, що рівність

$$f\left(x + k \cdot 2^{y}\right) = f(x) + k \cdot 2^{f(y)} \tag{6.62}$$

виконується при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та всіх $k \in \mathbb{N}$.

Далі, застосуємо (6.62) для $k = 2$. Одержимо, що

$$f(x) + 2^{f(y+1)} = f\left(x + 2^{y+1}\right) = f\left(x + 2 \cdot 2^{y}\right) =$$
$$= f(x) + 2 \cdot 2^{f(y)} = f(x) + 2^{f(y)+1}$$

для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$. Звідси слідує, що

$$f(y+1) = f(y) + 1 \tag{6.63}$$

для будь-яких дійсних y.

Покладемо в умову замість x і y відповідно x і 0, одержимо:

$$f\left(x + 2^{0}\right) = f(x) + 2^{f(0)},$$

тобто

$$f(x+1) = f(x) + 2^{f(0)}$$

для будь-яких дійсних x. Використовуючи (6.63), одержимо, що $2^{f(0)} = 1$, тобто $f(0) = 0$. Тому, співвідношення (6.63) дозволяє послідовно встановити значення функції f в усіх натуральних та всіх цілих від'ємних точках:

$$f(n) = n$$

для будь-яких цілих n.

Далі, покладемо в (6.62) замість x і y відповідно 0 та $-n$, одержимо:

$$f\left(0 + k \cdot 2^{-n}\right) = f(0) + k \cdot 2^{f(-n)},$$

тобто

$$f\left(\frac{k}{2^{n}}\right) = \frac{k}{2^{n}} \tag{6.64}$$

для будь-яких натуральних n і k.

Далі доведемо, що шукана функція f монотонно зростає. Нехай $x_1 < x_2$, де $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Тоді при $y = \log_2(x_2 - x_1)$, маємо, що $x_2 = x_1 + 2^{y}$, тобто

$$f(x_2) = f\left(x_1 + 2^{y}\right) = f(x_1) + 2^{f(y)} > f(x_1),$$

що і завершує доведення монотонності шуканої функції f.

Далі проводимо такі міркування. Нехай для деякого $a > 0$ виконується нерівність $f(a) > a$. Тоді знайдуться такі $k, n \in \mathbb{N}$, що $f(a) > \frac{k}{2^{n}} > a$. З того, що $\frac{k}{2^{n}} > a$ і монотонності f, знаходимо, що $f\left(\frac{k}{2^{n}}\right) > f(a)$. А враховуючи (6.64), знаходимо, що $\frac{k}{2^{n}} > f(a)$, що суперечить нерівності $f(a) > \frac{k}{2^{n}} > a$. Аналогічно дістаємо суперечність, якщо для деякого $a > 0$ виконується нерівність $f(a) < a$. Отже, $f(x) = x$ для усіх дійсних $x > 0$.

Нарешті, для довільного $x < 0$ виберемо таке натуральне k, щоб $x + k > 0$. Тоді $f(x+k) = x + k$. А за допомогою (2), встановлюємо, що $f(x+k) = f(x)+k$. Із цих двох останніх рівностей слідує, що $f(x) = x$ для усіх дійсних $x < 0$.

Таким чином, $f(x) = x$ для усіх дійсних x. Залишилося перевірити, що $f(x) = x$, де $x \in \mathbb{R}$, задовольняє умову задачі.

Відповідь. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. □

Задача 6.40. *Нехай $\mathbb{R}_{\neq 0}$ — множина усіх дійсних чисел, відмінних від 0. Знайти усі такі функції $f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}_{\neq 0}$, що для-будь-яких $x, y \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ і $y \neq -x^2$ виконується рівність*

$$f\left(x^2 + y\right) = f(x)^2 + \frac{f(xy)}{f(x)}.$$

(Болгарія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2005 р.)

Розв'язання. Позначимо $f(1) = \alpha$. Тоді, покладемо в умову замість x і y спочатку відповідно x і 1, а потім відповідно 1 і x, одержимо:

$$f\left(x^2 + 1\right) = f(x)^2 + 1 \tag{6.65}$$

для будь-якого дійсного $x \neq 0$, та

$$f(1 + x) = \alpha^2 + \frac{f(x)}{\alpha} \tag{6.66}$$

для будь-якого дійсного $x \neq 0$.

Використовуючи (6.66), послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned} f(2) &= \alpha^2 + 1, \\ f(3) &= \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha}, \\ f(4) &= \frac{\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2}, \\ f(5) &= \frac{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

А використовуючи (6.65), при $x = 2$, одержуємо:

$$f\left(2^2 + 1\right) = f(2)^2 + 1,$$

тобто $f(5) = \left(\alpha^2 + 1\right)^2 + 1$. Таким чином,

$$\frac{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^3} = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2,$$

$$\alpha^7+\alpha^5-\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-1=0,$$
$$\alpha^3\left(\alpha^4+\alpha^2+1\right)-\left(\alpha^4+\alpha^2+1\right)=0,$$
$$\left(\alpha^3-1\right)\left(\alpha^4+\alpha^2+1\right)=0,$$
$$(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha^2+1\right)=0.$$

Оскільки при будь-яких дійсних α друга і третя дужки — додатні, то $\alpha-1=0$, тобто $\alpha=1$. Таким чином, співвідношення (6.66) перепишеться так:

$$f(x+1)=f(x)+1 \tag{6.67}$$

для будь-якого дійсного $x\neq 0$ і $x\neq -1$. А тепер, покладемо в (6.67) замість x покладемо відповідно x^2, одержимо:

$$f\left(x^2+1\right)=f\left(x^2\right)+1 \tag{6.68}$$

для будь-якого дійсного $x\neq 0$. Порівнюючи (6.65) і (6.68), знаходимо:

$$f\left(x^2\right)=f(x)^2 \tag{6.69}$$

для будь-якого дійсного $x\neq 0$.

Оскільки $f(x)^2>0$, то із (5) слідує, що, $f(x)>0$ для будь-якого дійсного $x>0$. Далі, використовуючи (6.67), методом математичної індукції, доводимо, що

$$f(n)=n \tag{6.70}$$

для усіх $n\in\mathbb{N}$.

Нехай $\frac{a}{b}$, де a і b — натуральні числа, довільне додатне раціональне число. Покладемо в умову замість x і y відповідно b^2 і $\frac{a}{b}$, одержимо:

$$f\left(b^2+\frac{a}{b}\right)=f(b)^2+\frac{f(a)}{f(b)}.$$

Враховуючи (6.70), одержимо:

$$f\left(b^2+\frac{a}{b}\right)=b^2+\frac{a}{b}.$$

Далі, використовуючи (6.67), послідовно знаходимо:

$$f\left(b^2+\frac{a}{b}-1\right)=f\left(b^2+\frac{a}{b}\right)-1=b^2+\frac{a}{b}-1,$$

тобто

$$f\left(b^2+\frac{a}{b}-1\right)=b^2+\frac{a}{b}-1.$$

Аналогічно,

$$f\left(b^2+\frac{a}{b}-2\right)=b^2+\frac{a}{b}-2,$$
$$f\left(b^2+\frac{a}{b}-3\right)=b^2+\frac{a}{b}-3,$$

і т. д. Зрештою,

$$f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}.$$

Останнє співвідношення означає, що $f(x)=x$ для будь-якого додатного раціонального x. Далі, оскільки $f(x)>0$ і $f\left(x^2\right)=f(x)^2>0$ для будь-якого дійсного $x>0$, то використовуючи умову, доведемо, що $f(x)$ монотонно зростає при $x>0$. Дійсно, нехай $c>d>0$, тоді існує таке дійсне $e>0$, що $c=d+e$. Тоді,

$$\begin{aligned} f(c)&=f(d+e)=f\left(\left(\sqrt{d}\right)^2+e\right)=\\ &=f\left(\sqrt{d}\right)^2+\frac{f\left(e\sqrt{d}\right)}{f\left(\sqrt{d}\right)}>f\left(\sqrt{d}\right)^2=f\left(\left(\sqrt{d}\right)^2\right)=f(d), \end{aligned}$$

тобто, при $c>d>0$ виконується нерівність $f(c)>f(d)$. А це означає, що $f(x)$ монотонно зростає при $x>0$. Далі, доведемо, що коли $f(x)=x$ при усіх раціональних $x>0$, то $f(x)=x$ при усіх дійсних $x>0$. Дійсно, нехай існує таке дійсне $t>0$, при якому $f(t)>t$, тоді існує таке раціональне $r>0$, що $f(t)>r>t$. Враховуючи попередні зауваження, одержуємо, що $r=f(r)>f(t)>t$, що суперечить припущенню. Також, аналогічно, одержуємо протиріччя, якщо припустити існування такого дійсного $t>0$, для якого $f(t)<t$. Ці протиріччя і доводять, що

$$f(x)=x \tag{6.71}$$

для усіх дійсних $x>0$.

Нарешті, якщо $x<0$, то можна вибрати таке $y<0$, що $x^2+y>0$. Тоді, з умови задачі, з (6.69) і (6.71), послідовно одержуємо:

$$\begin{aligned} f\left(x^2+y\right)&=f(x)^2+\frac{f(xy)}{f(x)},\\ x^2+y&=f\left(x^2\right)+\frac{xy}{f(x)},\\ x^2+y&=x^2+\frac{xy}{f(x)},\\ y&=\frac{xy}{f(x)}, \end{aligned}$$

тобто $f(x)=x$ для усіх дійсних $x<0$.

Таким чином, $f(x)=x$ для усіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Перевірка показує, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Відповідь. $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. □

Література

1. Бродский, Я. С. Функциональные уравнения [Текст] / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. — К. : Вища школа, 1983. — 96 с.
2. Болтянский, В. Г. Симметрия в алгебре [Текст] / В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. — 2-е изд. изд. — Москва : МЦНМО, 2002. — 240 с. — ISBN: 5-94057-041-0.
3. Седракян, Н. М. Неравенства. Методы доказательства [Текст] / Н. М. Седракян, А. М. Авоян. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 256 с.
4. Зарубежные математические олимпиады : под ред. И. Н. Сергеева [Текст]. — Москва : Наука, 1987. — 416 с.
5. Маркушевич, А. И. Возвратные последовательности [Текст] / А. И. Маркушевич. — Москва : ГИТТЛ, 1950. — 48 с.
6. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А. Г. Курош. — 9-е изд. изд. — Москва : Наука, 1968. — 256 с.
7. Воробьев, Н. Н. Числа Фибоначчи [Текст] / Н. Н. Воробьев. — 4-е изд., доп. изд. — Москва : Наука, 1978. — 144 с.
8. Ясінський, В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції [Текст] / В. А. Ясінський. — Харків : ВГ «Основа», 2005. — 96 с.
9. Прасолов, В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие [Текст] / В. В. Прасолов. — 2-е изд., испр. изд. — М. : МЦНМО, 2011. — 608 с.
10. Мітельман, І. М. Розв'язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного [Текст] / І. М. Мітельман. — Одеса : ТЕС, 2014. — 67 с.
11. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 [Текст] / Під ред. Б. В. Рубльова. — Львів : Каменяр, 2008. — 549 с.
12. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. [Текст] / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — К. : Техніка, 2003. — 541 с.
13. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рік [Текст] / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. — Львів : Каменяр, 2008. — 348 с.
14. Матеріали ресурсу ArtOfProblemSolving.com [Electronic resource]. — [S. l. : s. n.]. — URL: `www.artofproblemsolving.com`.
15. Hung, Pham Kim. Secrets in inequalities. Volume 1. Basic inequalities [Text] / Pham Kim Hung. — Zalau : GIL, 2007. — 256 p.
16. Hung, Pham Kim. Secrets in inequalities. Volume 2. Advanced inequalities [Text] / Pham Kim Hung. — Zalau : GIL, 2008. — 256 p.
17. Manfrino, R.B. Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach [Text] / R.B. Manfrino, J.A.G. Ortega, R.V. Delgado. Mathematics and Statistics. — [S. l.] : Springer Basel AG, 2009.

Покажчик

Алгоритм Евкліда, 149

Бієкція, 165

Лема Тіту, 27

Метод
  математичної індукції, 124
  різниць змінних, 65
  Штурма, 151
Многочлен, 90
  зведений, 91
  звідний, 114
  незвідний, 113, 114
  симетричний, 55
Многочлени
  основні симетричні, 55

Нерівність
  AM-GM, 44
  QM-AM, 46
  Абеля, 14
  Гельдера, 226
  Коші, 44
  Коші–Буняковського–Шварца, 24, 47
    у формі Енгеля, 27
  Мюрхеда, 59
  Несбітта, 45
  перестановок, 42
  симетрична кубічна, 69
  трансферна, 42
  Чебишова, 46
  Чебишова покращена, 17
  Шура, 56

Ознака
  Ейзенштейна, 114
Основна теорема алгебри многочленів, 92

Послідовність
  задана рекурентно, 120
  зворотна порядку k, 130
  Фібоначчі, 141, 145, 146
  числова, 120
Принцип
  впорядкування, 171
  математичної індукції, 124
  Штурма, 72, 74

Реверсна техніка Коші, 36
Рівняння
  зворотне порядку k, 130
  функціональне, 163
  характеристичне для послідовності, 130

Симетрична кубічна нерівність, 69

Теорема
  Безу, 91
  Вейєрштрасса, 74
  основна алгебри многочленів, 92
  основна про симетричні многочлени, 55
  про симетричну кубічну нерівність, 69
  Столарскі, 71
Транснерівність, 42
Трансферна нерівність, 42

Формула
  Абеля, 13, 17–22
  Біне, 141
Формули
  Вієта, 99
Функція
  бієктивна, 165
  взаємно однозначна, 165
  ін’єктивна, 165
  сюр’єктивна, 165

Навчальне видання

ЯСІНСЬКИЙ В’ячеслав Андрійович
ПАНАСЕНКО Олексій Борисович

Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра

Навчально-методичний посібник

Підписано до друку 25.09.2015
Формат 64x90 1/16. Папір офсетний

Гарнітура ITC Charter. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 15,81. Обл.-вид. арк. 11,58. Зам. № 150.
Наклад 100 прим.

Видавець ФОП «Середняк Т.К.»,
49000, Дніпропетровськ, 18, а/с 1212
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серії DK №4379 від 02.08.2012.