УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ПЕРІОДИЧНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ SIN-ГОРДОНА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона на двовимірній ґратці.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, дискретне рівняння sin-Гордона, періодичні біжучі хвилі.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з потенціалом $V(x) = -K(1-\cos x)$, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = U'\left(q_{n+1,m} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n-1,m}\right) + \\ +U'\left(q_{n,m+1} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n,m-1}\right) + K\sin\left(q_{n,m}\right),\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2,\end{gathered} \tag{1}$$

де $K > 0$.

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь і є двовимірним аналогом дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх атомів.

Подібні системи є цікавими з огляду на чисельні застосування у фізиці [4; 6; 7].

Досить важливим класом розв'язків таких систем є біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама можна знайти в працях О. Панкова, зокрема в [12] найбільш повний огляд результатів. У статті [3] одержано умови існування періодичних біжучих хвиль в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі декілька праць, зокрема, [10], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також [1; 5], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок.

У статті [13] вивчались періодичні розв’язки для системи осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках, а в статтях [2; 8; 9] — біжучі хвилі в таких системах. Зокрема, в [8] розглядалась система із непарною 2π-періодичною нелінійністю. А в [9] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. В статті [2] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

У статті [11] вивчались гетероклінічні, гомоклінічні і періодичні біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх атомів на одновимірній ґратці.

Метою статті є одержання умов існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх осциляторів на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. Для профілю біжучої хвилі $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c^2u''(s) = U'\big(u(s+\cos\varphi) - u(s)\big) - U'\big(u(s) - u(s-\cos\varphi)\big) + \\ + U'\big(u(s+\sin\varphi) - u(s)\big) - U'\big(u(s) - u(s-\sin\varphi)\big) + K\sin\big(u(s)\big). \end{aligned} \qquad (2)$$

Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (2), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Будемо розглядати випадок періодичних біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв’язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$u(s+2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R},\ k > 0. \qquad (3)$$

Всюди далі під розв’язком рівняння (2) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір $E_k = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s+2k) = u(s)\right\}$ зі скалярним добутком $(u,\, v)_k = \int\limits_{-k}^{k} \big(u(s)v(s) + u'(s)v'(s)\big)ds$.

На просторі E_k означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)\,d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)\,d\tau.$$

Тоді правильне таке твердження (див. [3, с. 77]).

Лема 1. Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності

$$\|Au\|_{L^2(-k,\,k)} \le |\cos\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k,\,k)}, \quad \|Bu\|_{L^2(-k,\,k)} \le |\sin\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k,\,k)}.$$

Надалі передбачається, що потенціал U задовольняє умову:

(i) $U(x) = \dfrac{c_0^2}{2} x^2 + V(x)$, $c_0 \ge 0$, де $V \in C^1(\mathbb{R})$ — парна функція, $V \not\equiv 0$ і $0 \le \mu V(x) \le xV'(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ і деякого $\mu > 2$.

Неважко переконатися в тому, що якщо виконується умова (i), то існують такі сталі $d > 0$ і $d_0 > 0$, що $V(x) \ge d|x|^{\mu} - d_0$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) := \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U\big(Au(s)\big) - U\big(Bu(s)\big) + K\Big(1 - \cos\big(u(s)\big)\Big) \right\} ds.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні два твердження.

Лема 2. Нехай виконується умова (i), тоді J_k — функціонал класу C^1 на E_k, а його похідна для $u,\, h \in E_k$ виражається формулою

$$\langle J_k'(u),\, h\rangle = \int_{-k}^{k} \Big\{ c^2 u'(s) h'(s) - U'\big(Au(s)\big) Ah(s) -$$
$$- U'\big(Bu(s)\big) Bh(s) + K \sin\big(u(s)\big) h(s) \Big\} ds.$$

Лема 3. Критичні точки функціоналу J_k є C^2 — розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).

Основний результат. Для одержання основного результату статті знадобиться теорема про гірський перевал (див. [12; 14]).

Теорема 1 (про гірський перевал). Нехай I — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, який задовольняє умову Пале-Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n) \to 0$ та $I(u_n)$ обмежена, то (u_n) містить збіжну підпослідовність.

Нехай існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\| e \| > r$ і $\beta := \inf\limits_{\|v\| = r} I(v) > 0 = I(0) \ge I(e)$. І нехай $b := \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} I\big(\gamma(t)\big)$, де

$\Gamma = \left\{ \gamma \in C\left([0,1],\, H \right) : \gamma(0) = 0,\, \gamma(1) = e \right\}$. Тоді b — критичне значення функціоналу I, тобто існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що $I(u) = b \geq \beta$.

Лема 4. Нехай виконується умова (i). Тоді існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\| e \| > r$ і $\beta := \inf\limits_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e)$.

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon > 0$ і виберемо достатньо мале $r \in \left(0, \dfrac{\pi}{2} \right)$ таке, що $\left| V(x) \right| \leq \varepsilon x^2$ для всіх $x \leq r$. Тоді, використовуючи лему 1 і нерівність $1 - \cos(u) \geq \dfrac{u^2}{4}$ при $|u| < \dfrac{\pi}{2}$, для кожного u з $\|u\|_{L^2(-k,\,k)} \leq \|u\|_k < \dfrac{\pi}{2}$ маємо

$$J_k(u) \geq \int\limits_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2} \left| u'(s) \right|^2 - \frac{c_0^2}{2} \left| Au(s) \right|^2 - \frac{c_0^2}{2} \left| Bu(s) \right|^2 - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \left| Au(s) \right|^2 - \varepsilon \left| Bu(s) \right|^2 + K\left(1 - \cos\left(u(s) \right) \right) \right\} ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon \right) \|u'\|^2_{L^2(-k,\,k)} + \frac{K}{4} \|u\|^2_{L^2(-k,\,k)} \geq \alpha \|u\|_k^2,$$

де $\alpha = \min\left\{ \dfrac{1}{2}\left(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon \right),\, \dfrac{K}{4} \right\} > 0$. Отже, для $\|u\|_k^2 = r^2$

$$J_k(u) \geq \alpha r^2 > 0 .$$

Для того, щоб знайти $e \in E_k$ таке, що $\|e\|_k > r$ і $J_k(e) \leq J_k(0)$, зафіксуємо $u_0 \in E_k$. Тоді для всіх $\lambda \geq 0$, згідно нерівності $1 - \cos(u) \leq \dfrac{u^2}{2}$, маємо

$$J_k(\lambda u_0) \leq \frac{c^2}{2} \lambda^2 \|u_0'\|^2_{L^2(-k,\,k)} - d\lambda^{\mu} \|Au_0\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,\,k)} -$$

$$- d\lambda^{\mu} \|Bu_0\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,\,k)} + 4d_0 k + \frac{K}{2} \lambda^2 \|u_0\|^2_{L^2(-k,\,k)} .$$

Звідси, враховуючи, що $\mu > 2$, $d > 0$, $d_0 > 0$, маємо: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} J_k(\lambda u_0) = -\infty$, що й дає необхідне. Лему доведено.

Лема 5. Нехай виконується умова (i) і $c > c_0$, тоді функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.

Доводиться ця лема аналогічно до леми 3.4 зі статті [11].

Наступна теорема є основним результатом цієї статті:

Теорема 2. Нехай виконується умова (i), $c > c_0$, $k \geq 1$ і

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) < 4kK,$$

де $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. Тоді рівняння (2) має нетривіальний розв'язок $u \in E_k$. Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.

Доведення. Леми 4 і 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має критичну точку $u_0 \in E_k$: $J_k(u_0) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) < 4kK$, де $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. За лемою 3 ця критична точка є розв'язком рівняння (2), який задовольняє умову (3).

Покажемо, що цей розв'язок несталий. Справді, сталий розв'язок $u \in E_k$ рівняння (2) обов'язково задовольняє тотожність $\sin(u) \equiv 0$, а отже, $u = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо n — парне, то $J_k(\pi n) = 0$, але $b > 0$. Якщо ж n — непарне, то $J_k(\pi n) = 4kK$, але $b < 4kK$. Теорему доведено.

Висновки. Одержано теорему про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Гордона з нелінійною взаємодією сусідніх осциляторів на двовимірній ґратці (теорема 2), яка поширює результат статті [11].

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. — 2006. — Т. 26, №2. — С. 140–153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, №2. — С. 154–175.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, №1. — С. 76–88.
4. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — Vol. 103. — P. 201–250.

5. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. — 2007. — Vol. 3, № 1. — P. 19–26.
6. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — P. 1–108.
7. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
8. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20. — P. 319–341.
9. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, №1 (February). — P. 105–114.
10. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. — 2000. — P. 439–464.
11. Kreiner C.-F. Travelling wave solutions for the discrete sine-Gordon equation with nonlinear pair interaction / C.-F. Kreiner, J. Zimmer // Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications. — Vol. 70, № 9. — 2009. — P. 3146–3158.
12. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. — London ; Singapore : Imperial College Press, 2005. — 196 p.
13. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118–122.
14. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. — Boston, 1996. — 162 p.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators. It is obtained result on existence of periodic travelling waves for the discrete sin-Gordon equation on 2D-lattice.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, discrete sine-Gordon equation, periodic travelling waves.*

Отримано: 25.11.2013