Л.А. Вотякова, О.Г. Руда
м. Вінниця

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ Є ОДНОЧАСНО ОДНОРІДНИМИ І В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Анотація. *В статті продемонстрований один метод побудови диференціальних рівнянь, які є одночасно однорідними і в повних диференціалах.*

Ключові слова: *однорідні диференціальні рівняння, інтегрувальний множник, повні диференціали, аналітична функція.*

Annotation. *In the article demonstrated a method of constructing differential equations that are both homogeneous and complete differentials.*

Keywords: *homogeneous differential equations, integrable factor, complete differentials, analytical function.*

Постановка проблеми. Нехай маємо однорідне диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

тобто у рівнянні (1) функції $P(x,y)\, i\, Q(x,y)$ є однорідні функції одного степеня. Нехай для означеності степінь однорідності цих функцій рівняється *m*, тобто $P(tx,ty) = t^m P(x,y)$, $Q(tx,ty) = t^m Q(x,y)$.

Добре відома підстановка [1, с. 117] $z = \dfrac{x}{y}$ приводить до рівняння з відокремлюваними змінними

$$x^m \left(P(1,z) + Q(1,z)z \right) dx + x^{m+1} Q(1,z) dz = 0. \tag{2}$$

Інтегрувальним множником рівняння (2) є функція $\mu = \dfrac{1}{\left(P(1,z) + Q(1,\, z)z\right) x^{m+1}}$ або, перейшовши до змінних x і y ,маємо, що для рівняння (1) інтегрувальним множником є функція $\mu(x,\, y) = \dfrac{1}{\left(xP(1,z) + yQ(1,\, z)z\right)}$, якщо $xP(x,y) + yQ(x,y) \neq 0$. Якщо ж $xP(x,y) + yQ(x,y) \equiv 0$, то однорідне рівняння приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними $ydx - xdy = 0$.

Якщо скористатись результатом (див. [2, с. 121]) про подання загального інтеграла рівняння (1) через два істотно різних інтегрувальних множники, то для однорідного рівняння (1), яке одночасно є рівнянням у повних диференціалах, його загальний інтеграл можна записати, не виконуючи інтегрувань. Справді, для такого рівняння маємо два істотно різні інтегрувальні множники $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \dfrac{1}{xP(x,\, y) + yQ(x,\, y)}$, а тому $\dfrac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = C$ є його загальним інтегралом.

Отже, у випадку, коли рівняння (1) є одночасно і однорідним, і в повних диференціалах, тобто $P(x,y)\,i\,Q(x,y)$ однорідні функції одного степеня і $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то його загальний інтеграл записується у вигляді $xP(x,y) + yQ(x,y) = C$.

Щоб мати можливість будувати такого типу рівняння, нам необхідно з'ясувати, за яких умов функція $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, де $U(x,y), V(x,y)$ – однорідні функції степеня *m,* буде аналітичною.

Мета даної публікації. Продемонструвати метод побудови диференціальних рівнянь, які є одночасно однорідними і в повних диференціалах.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо теореми, що допоможуть з'ясувати, за яких умов функція $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, де $U(x,y), V(x,y)$ – однорідні функції степеня *m,* буде аналітичною. Ці результати і дозволяють розробити новий метод побудови диференціальних рівнянь вказаного типу.

Теорема 1. Функція

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

де $U(x,y), V(x,y)$ – однорідні функції степеня *m,* є аналітичною, якщо

$$U(x, y) = x^m P\left(\frac{y}{x}\right), \quad V(x, y) = x^m Q\left(\frac{y}{x}\right),$$

де $\left(P(t), Q(t)\right)$ - розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} P'(t) = \dfrac{mt}{t^2+1}P(t) - \dfrac{m}{t^2+1}Q(t) \\ Q'(t) = \dfrac{m}{t^2+1}P(t) - \dfrac{mt}{t^2+1}Q(t) \end{cases}$$

Теорема 2. Частинним розв'язком рівняння

$$P''(t) = \frac{m - m^2}{t^2+1}P(t) + \frac{2(m-1)t}{t^2+1}P'(t),$$

де m – натуральне число, є функція

$$P_1(t) = \frac{1}{x^m}\operatorname{Re} z^m \mid t = \frac{y}{x}$$

Теорема 3. Загальний розв'язок рівняння

$$P''(t) = \frac{m\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}P(t) + \frac{mt}{t^2+1}P'(t) + \frac{2mt}{\left(t^2+1\right)^2}P(t) - \frac{2t}{\left(t^2+1\right)}P'(t) - \frac{m^2}{t^2+1}P(t) + \frac{mt}{t^2+1}P'(t).$$

має вигляд

$$P(t)=P_1(t)(C_1+C_2)\frac{\left(t^2+1\right)^{m-1}}{P_1^2(t)}.$$

Теорема 4. Функція $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, де $U(x,y)\ i\ V(x,y)$ однорідні функції степеня m (m – натуральне), є аналітичною, якщо

$$U(x,y)=x^mP\left(\frac{y}{x}\right),\quad V(x,y)=x^mQ\left(\frac{y}{x}\right),$$

де $P(t)=P_1(t)\left(C_1+C_2\int\frac{(t^2+1)^{m-1}}{P_1^2(t)}dt\right)$, $P_1(t)=\frac{1}{x^m}\operatorname{Re}z^m\,|\,t=\frac{y}{x}$ (3)

$$Q(t)=tP(t)-\frac{t^2+1}{m}P'(t).$$

Висновки. Функції (3) гармонійно спряжені, а тому рівняння

$$x^kP\left(\frac{y}{x}\right)dx-x^kQ\left(\frac{y}{x}\right)dy=0,\quad x^kP\left(\frac{y}{x}\right)dx+x^kQ\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$$

є одночасно і однорідними, і у повних диференціалах. Загальні інтеграли цих рівнянь подаються у вигляді

$$x^{k+1}P\left(\frac{y}{x}\right)-x^kyQ\left(\frac{y}{x}\right)=0,\quad x^{k+1}P\left(\frac{y}{x}\right)+x^kyQ\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

Література

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В Метод теории функций комплексного переменного. – М., Наука, 1987. – 688 с.
2. Лавренюк С.Л. Курс диференціальних рівнянь. – Львів: вид Н-ТЛ, 1997. – 214 с.
3. Томусяк А.А., Вотякова Л.А. Новий клас рівнянь Ріккарті, які інтегруються у квадратурах // Міжнародна конференція. П’яті Боголюбовські читання «Теорія еволюційних рівнянь». Тези доповідей. – Кам’янець-Подільський. 2002. – с. 164.
4. Томусяк А.А., Вотякова Л.А., Ковтонюк М.М. До питання побудови диферецінальних рівнянь першого порядку, які інтегруються у квадратурах // Науковий збірник «Сучасні проблеми фізики та математики». – 9випуск. ВДПУ, 2004. – С 109-120.
5. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Вотякова Л.А. Диференціальні рівняння. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – Вінниця, 2012. – 385 с.
6. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Про один метод побудови диференціальних рівнянь першого порядку з інтегрувальним множником заданого вигляду// Восьма Міжнародна конференція ім. Акад. М.Кравчука. –матеріали конференції. – К., 2000. – с 197.