О.Б. Панасенко, А.В. Тіманова
м. Вінниця

СИНГУЛЯРНІ ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕНІ В ТЕРМІНАХ ЧАСТОТИ ВЖИВАННЯ ТРІЙКОВИХ ЦИФР АРГУМЕНТУ

***Анотація**. В цій роботі ми конструюємо нові приклади строго зростаючих сингулярних функцій, означення яких базується на використанні частоти вживання трійкових цифр аргументу.*

***Ключові слова.** Сингулярні функції, строго зростаючі функції.*

***Annotation**. In this paper, we construct new examples of strictly increasing singular functions, which defined with usage frequency of arguments' ternary digits.*

***Keywords.** Singular functions, strictly increasing functions.*

Постановка проблеми. Функція $f: R \to R$ називається сингулярною, якщо вона відмінна від константи, а її похідна дорівнює нулю майже скрізь. Перші приклади таких функцій належать Кантору і Лебегу (функція Кантора), Мінковському (функція Мінковського $?(x)$), Салему (функція Салема) і є загальновідомими, а їхні властивості та певні узагальнення достатньо глибоко вивчені (див., зокрема, [3–4]).

Для означення сингулярних функцій зазвичай використовується один з двох підходів: або у вигляді границі певної рівномірно збіжної послідовності неспадних функцій (як у випадку функцій Кантора і Салема), або на основі опису зв'язку між цифрами аргументу, які записані в певній системі числення, із цифрами значення функції, записаними, можливо, в іншій системі числення. Так, функція Мінковського визначена в термінах зображення аргументу ланцюговим дробом, а значення функції – двійковим дробом. Вказаний другий підхід є достаньо продуктивним і в останні роки з'являються нові класи функцій зі складною локальною поведінкою, які означені в такий спосіб [1–2, 5].

Мета даної публікації – ввести в розгляд новий клас функцій, означених в термінах частоти вживання трійкових цифр аргументу, обгрунтувати коректність введеного означення і дослідити деякі властивості введених функцій.

Виклад основного матеріалу. В роботі [5] введено в розгляд нову функцію, означення якої базується на оперуванні кількістю одиниць в двійковому розкладі аргументу.

В цій роботі ми вводимо у розгляд клас функцій, в означенні яких фігуруватиме кількість цифр 0,1,2 в трійковому представленні аргументу.

Введемо такі позначення: нехай $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}\equiv\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\equiv\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$, $\alpha_k\in\{0,1,2\}$ для всіх k; $N_i(k,x)$, $i\in\{0,1,2\}$ – кількість цифр i серед трійкових цифр $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ числа x.

Очевидно, що якщо $x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}\in[0,1]$, то функція $i(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}$ є тотожним перетворенням. Її графік – зростаюча лінійна функція, для якої $f(0)=0$, $f(1)=1$. Надамо певної нерегулярності доданкам ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}$, дещо їх змінивши, а саме розглядатимемо ряди виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}a^{N_0(k,x)}b^{N_1(k,x)}c^{N_2(k,x)}d$.

Дослідимо, за яких умов на числа a, b, c, d (окрім $a=b=c=d=1$) функція

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}a^{N_0(k,x)}b^{N_1(k,x)}c^{N_2(k,x)}d\,, \qquad (1)$$

де $x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ буде, по-перше, коректно визначеною (тобто для різні представлення трійково раціонального числа x породжують одне і те ж значення $f(x)$), і, по-друге, буде задовольняти умови $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Нехай, $x=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}$ $\alpha_n\neq 0$ – трійково раціональне число з $[0,1]$. Для зручності через x' позначимо це ж саме число, але яке записується у вигляді $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)(2)}$. Співставимо вирази $f(x)$ і $f(x')$ за формулою (1):

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{3^k}a^{N_0(k,x)}b^{N_1(k,x)}c^{N_2(k,x)}d+\frac{\alpha_n}{3^n}a^{N_0(n,x)}b^{N_1(n,x)}c^{N_2(n,x)}d\,,$$

$$f(x')=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{3^k}a^{N_0(k,x)}b^{N_1(k,x)}c^{N_2(k,x)}d+\frac{\alpha_n-1}{3^n}a^{N_0(n,x')}b^{N_1(n,x')}c^{N_2(n,x')}d+$$

$$+\frac{2}{3^{n+1}}a^{N_0(n,x')}b^{N_1(n,x')}c^{N_2(n,x')+1}d+\frac{2}{3^{n+2}}a^{N_0(n,x')}b^{N_1(n,x')}c^{N_2(n,x')+2}d+\ldots=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{3^k}a^{N_0(k,x)}b^{N_1(k,x)}c^{N_2(k,x)}d+\frac{\alpha_n-1}{3^n}a^{N_0(n,x')}b^{N_1(n,x')}c^{N_2(n,x')}d+$$

$$+\frac{2}{3^{n+1}}a^{N_0(n,x')}b^{N_1(n,x')}c^{N_2(n,x')+1}d\,\frac{3}{3-c},$$

причому для можливості використання суми геометричної прогресії ми вводимо обмеження $c<3$. Для коректності означення функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб $f(x)\equiv f(x')$, тобто

$$\frac{\alpha_n}{3^n} a^{N_0(n,x)} b^{N_1(n,x)} c^{N_2(n,x)} d = \frac{\alpha_n - 1}{3^n} a^{N_0(n,x')} b^{N_1(n,x')} c^{N_2(n,x')} d + \\ + \frac{2}{3^{n+1}} a^{N_0(n,x')} b^{N_1(n,x')} c^{N_2(n,x')+1} d \, \frac{3}{3-c}. \qquad (2)$$

Розглянемо два випадки: коли $\alpha_n = 1$ і коли $\alpha_n = 2$.

Якщо $\alpha_n = 1$, то $N_0(n,x') = N_0(n,x) + 1$, $N_1(n,x') = N_1(n,x) - 1$, $N_2(n,x') = N_2(n,x)$ і рівність (2) переписується у вигляді

$$a^{N_0(n,x)} b^{N_1(n,x)} c^{N_2(n,x)} = \frac{2}{3} a^{N_0(n,x)+1} b^{N_1(n,x)-1} c^{N_2(n,x)+1} \frac{3}{3-c},$$

тобто

$$b(3-c) = 2ac. \qquad (3)$$

Якщо $\alpha_n = 2$, то $N_0(n,x') = N_0(n,x)$, $N_1(n,x') = N_1(n,x) + 1$, $N_2(n,x') = N_2(n,x) - 1$ і рівність (2) переписується у вигляді

$$2a^{N_0(n,x)} b^{N_1(n,x)} c^{N_2(n,x)} = a^{N_0(n,x)} b^{N_1(n,x)+1} c^{N_2(n,x)-1} + \frac{2}{3} a^{N_0(n,x)} b^{N_1(n,x)+1} c^{N_2(n,x')} \frac{3}{3-c},$$

тобто

$$2 = \frac{b}{c} + \frac{2b}{3-c},$$

або $b = \dfrac{2c(3-c)}{3+c}$.

Підставивши одержане значення в (3) знаходимо, що $a = \dfrac{(3-c)^2}{3+c}$.

Таким чином, коректність означення функції формулою (1) буде забезпечена тоді і тільки тоді, коли $a = \dfrac{(3-c)^2}{3+c}$, $b = \dfrac{2c(3-c)}{3+c}$, $0 < c < 3$.

Коефіцієнтом d забезпечимо виконання умови $f(1) = 1$:

$$f\left(\Delta_{(2)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} c^k d = \frac{2cd}{3}\left(1 + \frac{c}{3} + \frac{c^2}{9} + \ldots\right) = \frac{2cd}{3} \cdot \frac{3}{3-c} = 1,$$

звідки $d = \dfrac{3-c}{2c}$.

Нашими міркуваннями ми довели таке твердження:

Лема 1. Нехай $0 < c < 3$. Тоді функція

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \left(\frac{(3-c)^2}{3+c}\right)^{N_0(k,x)} \left(\frac{2c(3-c)}{3+c}\right)^{N_1(k,x)} c^{N_2(k,x)} \frac{3-c}{2c},$$

де $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}\equiv\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ є коректно визначеною на відрізку $[0,1]$, причому $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Зауважимо, що при $c=1$, $f(x)\equiv x$. При $c=2$, врахувавши, що $N_0(k,x)+N_1(k,x)+N_2(k,x)=k$ отримаємо таку функцію з відносно простим алгебраїчним представленням:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\cdot 4^{N_1(k,x)-1}\cdot 10^{N_2(k,x)}}{15^k}. \tag{4}$$

Теорема 1. Функція $f(x)$, визначена формулою (4), є строго зростаючою на $[0,1]$.

Для доведення того, що функція є строго зростаючою на $[0,1]$ потрібно показати, що з того, що $x_1<x_2$ слідує, що $f(x_1)<f(x_2)$. Справді, нехай $x_1=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots}$, $x_2=\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\beta_{k+1}\ldots}$, причому $\alpha_{k+1}<\beta_{k+1}$. Тоді, з формули (4), легко побачити, що, з одного боку, $f(x_1)\le f\left(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}(2)}\right)$, а з іншого боку $f\left(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}(2)}\right)=f\left(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(\alpha_{k+1}+1)(0)}\right)\le f\left(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\ldots}\right)$, причому рівності досягаються лише коли $x_1=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_{k+1}(2)}$, $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(\alpha_{k+1}+1)(0)}=x_2$ і при $x_1\ne x_2$ одночасно цього не може відбутись. За транзитивністю знаходимо, що $f(x_1)<f(x_2)$.

Наступні твердження щодо властивостей функції (4) наводимо без повного обгрунтування.

Теорема 2. Для кожного $x\in[0,1]$ мають місце співвідношення: $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{15}f(x)$, $f\left(\frac{x+1}{3}\right)=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}f(x)$, $f\left(\frac{x+2}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}f(x)$.

Це твердження вказує на самоафінність графіка побудованої функції, тобто вона попадає в клас функцій, які досліджувались в роботах [1,2].

Теорема 3. Функція $f(x)$, визначена формулою (4), є неперервною на $[0,1]$.

Теорема 4. Функція $f(x)$, визначена формулою (4), є сингулярною.

Література

1. Калашніков А. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов’язані з Q-зображенням дійсних чисел / А. В. Калашніков, М. В. Працьовитий // Укр. Мат. Журн. – 2013. – 65, № 3. – С. 405-417.

2. Працьовитий М. В. Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій / М. В. Працьовитий, О. Б. Панасенко // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. — 2009. — Т. 70. — С. 128–139.
3. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий. – Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
4. Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый. – Київ : Наукова думка, 1992. – 208 с.
5. Jo K. A Construction of Strictly Increasing Continuous Singular Function / K. Jo // J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. – 2016. – Vol. 23, № 1. – P. 21–34.

І.О. Дьогтєва
м. Вінниця

АНАЛІЗ ВИПАДКУ РІВНОСТІ СЕРЕДНЬОГО ЧАСУ НАДХОДЖЕННЯ ВИМОГИ І ОБСЛУГОВУВАННЯ В МОДЕЛІ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ПРИ ДВОЕТАПНОМУ ВХІДНОМУ ПОТОЦІ

Анотація. *Тези доповідей присвячені математичній моделі, що описує функціонування системи масового обслуговування при двоетапному вхідному потоці. В роботі проаналізовано випадок, коли середній час надходження вимоги дорівнює середньому часу обслуговування, зокрема, встановлено, що протягом достатньо великого проміжку часу тривалість простою буде менша тривалості зайнятості системи.*

Ключові слова: *система масового обслуговування, ланцюг Маркова, показниковий розподіл.*

Annotation. *Abstracts dedicated mathematical model that describes the operation of the queuing system with two-phase input stream. This paper analyzes the case where the average time of the request equals the average service time, in particular, found that for sufficiently long period of time will be less downtime duration employment system.*

Key words: *queuing system, Markov chain, exponent distribution.*

Нехай на обслуговуючий пристрій надходить рекурентний потік вимог, що задається розподілом

$$\overline{F}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t}, \qquad (1)$$

де $\lambda_1 > 0$ і $\lambda_2 > 0$. Очевидно, що (1) є законом розподілу суми двох незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, кожна з яких має показниковий розподіл відповідно з параметрами λ_1, λ_2.