Література

1. Белов В.В. Теория графов / В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.
2. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Советское радио, 1964. – 351 с.

Л.А. Вотякова, Я.В.Шмулян
м. Вінниця

ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНЬ МНОЖИНИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ, ЯК ОСНОВА ФОРМУВАННЯ У СТУДЕНТІВ НАВИЧОК ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Анотація. *У статті розглядається узагальнення множини комплексних чисел як основа формування у студентів навичок дослідницької діяльності*

Ключові слова: *множина комплексних чисел, лінійний простір, спряжений елемент.*

Annotation. *In the article summarizing the set of complex numbers as a basis for formation of students' research skills.*

Keywords: *a set of p complex numbers, a set of q complex numbers, linear space, conjugate element.*

Постановка проблеми. Майбутній вчитель математики повинен уміти конструювати і досліджувати нові математичні об'єкти. І тоді рівень його професійної підготовки значно зростає. Цього можна досягти і розв'язуючи задачі в рамках навчальної програми і в процесі самоосвітньої діяльності.

Мета даної публікації – показати один із методів побудови нового математичного об'єкту. А саме : побудова узагальнення множини комплексних чисел.

Основна задача такої побудови – це формування у студентів навичок власної дослідницької діяльності.

Виклад основного матеріалу. Нехай маємо квадратний тричлен $x^2 - 2px + q$, у якого $p, q \in R,\ p^2 - q$ <0, і нехай I корінь цього тричлена, тобто

$$I^2 - 2pI + q = 0. \qquad (1)$$

За базисну множину візьмемо множину

$$C_{p,q} = \{a + bI \mid a, b \in R\}. \qquad (2)$$

Наділимо цю множину двома операціями у такий спосіб: $\forall a_1 + b_1 I, a_2 + b_2 I \in C_{p,q}$

$$\begin{aligned} &a_1 + b_1 I + a_2 + b_2 I := a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)I, \\ &(a_1 + b_1 I)(a_2 + b_2 I) := a_1 a_2 - q b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2p b_1 b_2)I, \end{aligned} \qquad (3)$$

і дослідимо, яку алгебраїчну структуру має множина (2) з операціями (3).

Насамперед очевидно, що операція додавання є комутативною і асоціативною, а за нейтральний (нульовий) елемент слід взяти елемент $0+0\cdot I$.

Легко перевірити , що для кожного елемента $a+bI\in C_{p,q}$ маємо протилежний елемент $-a+(-b)I\in C_{p,q}$ такий, що $a+bI+(-a+(-b)I)=0+0\cdot I$

Отже, $C_{p,q}$ відносно додавання є абелевою групою.

Операція множення означена з врахуванням умови (1), тобто множення двох елементів з $C_{p,q}$ виконується як множення многочленів з врахуванням того, що $I^2=-q+2pI.$ (4)

У зв'язку з цим легко перевірити, що операція множення є комутативною і асоціативною.

Далі, для будь-якого $a+bI\in C_{p,q}$ $(a+bI)(1+0I)=a+bI,$ тобто елемент 1+0*I* є нейтральним (одиничним) елементом відносно множення.

Для кожного $a+bI\in C_{p,q}$ існує єдиний елемент $a+2pb-bI$ такий, що $(a+bI)(a+2pb-bI)=a^2+2pab+qb^2.$

Будемо називати цей елемент спряженим до $a+bI$ і позначати $\overline{a+b\mathrm{I}}$, тобто, $\overline{a+bI}:=a+2pb-bI$ (5)

$$(a+bI)(\overline{a+bI})=a^2+2pab+qb^2$$

(6)

Зокрема, $\overline{I}=2p-I$, а, отже, $\overline{a+bI}=a+b\overline{I}$.

Крім того $I\overline{I}=I(2p-I)=q$, (7)

а для елементів вигляду a+0I маємо $\overline{a+0I}=a+0\cdot I$ і $(a+bI)(\overline{a+0\cdot I})=a^2$.

Нехай $a+bI$ довільний елемент з $C_{p,q}$ відмінний від нульового елемента 0+0*I*. Тоді

$$(a+bI)\left(\frac{a+2pb}{a^2+2pab+b^2}-\frac{b}{a^2+2pab+b^2}I\right)=\frac{a^2+2pab+b^2}{a^2+2pab+b^2}+$$

$$+\frac{-ab+ab+2pb^2-2pb^2}{a^2+2pab+b^2}I=1+0I,$$

тобто $\forall a+bI\neq 0+0\cdot I$ існує обернений елемент.

Таким чином множина $\mathrm{C}_{\mathrm{p,q}}$ (без нульового елемента) є абелевою групою відносно множення.

Нарешті, неважко перевірити, що операція множення є дистрибутивною відносно додавання, тобто для довільних $a_1+b_1I, a_2+b_2I, a_3+b_3I$ з $C_{p,q}$ має місце рівність:

$$(a_1+b_1I+a_2+b_2I)(a_3+b_3I)=(a_1+b_1I)(a_3+b_3I)+(a_2+b_2I)(a_3+b_3I).$$

Підсумовуючи зроблене, робимо висновок, що математична структура $(C_{p,q},+,\cdot)$ є полем з нульовим елементом 0+0*I* і одиничним елементом 1+0*I*.

У ньому для кожного елемента $a+bI$ існує єдиний протилежний елемент $-a-bI$, а для кожного $a+bI \neq 0+0\cdot I$ існує єдиний обернений

$$\frac{a+2pb}{a^2+2pab+b^2}-\frac{b}{a^2+2pab+b^2}I\,.$$

У цьому полі для кожного елемента $a+bI$ означено спряжений елемент $\overline{a+bI}=a+b\overline{I}=a+2pb-bI$ такий , що

$(a+bI)(a+b\overline{I})=a^2+2pab+qb^2$ є невідоме число.

Поняття спряженого елемента дозволяє досить просто записати результат ділення двох елементів з $C_{p,q}$.

А саме, для довільних елементів $a_1+b_1I, a_2+b_2I \neq 0+0\cdot I$

$$\frac{a_1+b_1I}{a_2+b_2I}=\frac{a_1a_2+qb_1b_2+2pa_1b_2}{a_2^2+2pa_2b_2+qb_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+2pa_2b_2+qb_2^2}I=\frac{(a_1+b_1I)(a_2+b_2\overline{I})}{a_2^2+2pa_2b_2+qb_2^2}.$$

Неважко також переконатись, що

$$\overline{a_1+b_1I+a_2+b_2I}=\overline{a_1+b_1I}+\overline{a_2+b_2I},$$

$$\overline{(a_1+b_1I)(a_2+b_2I)}=\overline{a_1a_2-qb_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2+2pb_1b_2)I}=a_1a_2-qb_1b_2+$$
$$+2p(a_1b_2+b_1a_2+2pb_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2+2pb_1b_2)I=\overline{a_1+b_1I}\cdot\overline{a_2+b_2I}$$

Означення: Поле $C_{p,q}$ будемо називати полем p,q-комплексних чисел, а його елементи p,q-комплексними числами.

Очевидно, що підмножина $\{a+0I \mid a\in R\}$ є підполе поля $C_{p,q}$, причому воно ізоморфне полю дійсних чисел *R,* тому ми точно так само як у полі *C* ототожнимо підполе $\{a+0I \mid a\in R\}$ з полем *R*, тобто замість a+0*I* будемо писати просто a.

Зазначимо, що поле $C_{p,q}$ можна розглядати і як лінійний простір над полем *R*, бо $\forall z_{p,q}=a+bI\in C_{p,q}$ і $\forall\lambda\in R\;\lambda(a+bI)=\lambda a+\lambda bI.$

Тепер нас цікавить геометрична інтерпретація p,q-комплексних чисел.
Для початку на множині $C_{p,q}$ означимо білінійну форму у такий спосіб:

$$\begin{gathered}\forall a_1+b_1I, a_2+b_2I\in C_{p,q}\\ A(a_1+b_1I, a_2+b_2I)=a_1a_2+pa_1b_2+pb_1a_2+qb_1b_2\end{gathered}\tag{8}$$

де $p^2-q<0.$

Неважко перевірити, що (8) задовольняє всі чотири аксіоми скалярного добутку, тобто

$\forall a_1+b_1I, a_2+b_2I, a_3+b_3I\in C_{p,q}, t\in R$ маємо:

1. $A(a_1+b_1I, a_2+b_2I)=A(a_2+b_2I, a_1+b_1I),$

2. $A(a_1+b_1I+a_2+b_2I, a_3+b_3I)=A(a_1+b_1I, a_3+b_3I)+A(a_2+b_2I, a_3+b_3I)$,

3. $A(t(a_1+b_1I), a_2+b_2I)=tA(a_1+b_1I, a_2+b_2I)$,

4. $A(a_1+b_1I,a_1+b_1I)\geq 0,$ причому $A(a_1+b_1I,a_1+b_1I)=0$ тоді і тільки тоді, коли $a_1+b_1I=0+0I$.

Отже, (8) наділяє поле $C_{p,q}$ структурою евклідового простору над полем дійсних чисел R.

Позначати скалярний добуток будемо у такий спосіб: $(a_1+b_1I,a_2+b_2I):=A(a_1+b_1I,a_2+b_2I).$

Скалярний добуток (8) породжує норму

$$\|a+bI\|=\sqrt{(a+bI)\overline{a+bI}}=\sqrt{a^2+2pab+qb^2}, \tag{9}$$

квадрат якої збігається з (6), і поле $C_{p,q}$ є нормованим, більше того банаховим простором.

У нормованому просторі у стандартний спосіб задається відстань

$$\begin{gathered} d(a_1+b_1I,a_2+b_2I)=\|a_1+b_1I-a_2-b_2I\|= \\ =\sqrt{(a_1-a_2)^2-2p(a_1-a_2)(b_1-b_2)+q(b_1-b_2)^2} \end{gathered} \tag{10}$$

Оскільки $C_{p,q}$ є лінійний простір над полем дійсних чисел R розмірності два, то цілком природно за базисні обрати p,q-комплексні числа 1+0*I*, 0+1*I*, тобто 1 і *I*.

Очевидно, що для цих чисел $\|1\|=1, \|I\|=\sqrt{q},\ \cos\varphi=\cos(1,I)=\dfrac{(1,I)}{\|1\|\cdot\|I\|}=\dfrac{p}{\sqrt{q}}.$

Зрозуміло, що кут φ буде задовольняти умови

$$0<\varphi\leq\frac{\pi}{2}\text{, якщо } p\geq 0,\ \frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\text{, якщо } p<0.$$

У базисі (1,I) елементи поля $C_{p,q}$ можна розглядати як координатне подання елементів лінійного простору над полем R, тобто $z_{p,q}=a+bI$ у базисі (1,I) є пара дійсних чисел (a,b).

Висновки. Таким чином ми показали метод побудови нової числової системи шляхом узагальнення множини комплексних чисел.

Література

1. Малихін О.В. Методичні рекомендації для формування у майбутніх вчителів потреби у професійній самоосвіті / О.В. Малихін. – Кривий ріг: КДПУ, 2000. – 24с.
2. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник для студ. Матем. Спец. Пед. навч. Закладів / З.І. Слєпкань. – К.: зодіак – ЕКО, 2000. – 512с.
3. Томусяк А.А. Побудова поля комплексних чисел, пов'язаного з косокутною системою координат. // Шоста Міжнародна наукова конференція ім.. ак. М. Кравчука. Матеріали конференції / А.А. Томусяк. – К.: 1997. – С. 395.
4. Яглом И.М. Комплексные числа / И.М. Яглом– М.: ГИЗФМЛ, 1963. – 192 с.