УДК 517.97
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.5-14

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук,
Г. М. Ковтонюк, канд. пед. наук,
І. В. Печериця, магістрант

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

СТОЯЧІ ХВИЛІ З ПЕРІОДИЧНОЮ АМПЛІТУДОЮ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Вивчаються такого типу рівняння із насичуваною нелінійністю. Спочатку розглянуто рівняння типу Шредінгера з більш загальною нелінійністю, яка має такі ж властивості, як і насичувана нелінійність. Для таких рівнянь одержано результат про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль з періодичною амплітудою (зауважимо, що такі розв'язки часто називають бризерами). Для цього дане рівняння подано в операторному вигляді в просторі двохсторонніх послідовностей. Припущено, що коефіцієнти відповідного лінійного оператора утворюють k-періодичні послідовності. Цей оператор є обмеженим і самоспряженим у просторі всіх k-періодичних послідовностей. Потім побудовано спеціальний функціонал, критичні точки якого в цьому просторі є розв'язками вихідного рівняння. Знайдено похідну Гато цього функціоналу. Далі розглянуто многовид Нехарі для заданої варіаційної задачі, який представляє собою множину нетривіальних критичних точок побудованого функціоналу в просторі k-періодичних послідовностей. Показано, що цей многовид Нехарі непорожній і замкнений підмноговид даного простору. Крім того, розглянуто відповідну задачу мінімізації і показано, що на розглянутому многовиді Нехарі ця задача за певних умов має розв'язок. А отже, за цих умов вихідне рівняння має нетривіальні періодичні розв'язки. І остаточно, в силу того, що насичувана нелінійність задовольняє вказані умови, в статті встановлено існування двох нетривіальних стоячих хвиль з k-періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. Одержані в статті результати є поширенням вже відомих результатів для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на одновимірних та двовимірних ґратках.

Ключові слова: *дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі, насичувана нелінійність.*

Вступ. Останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння sin-Ґордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [1; 2; 7; 8; 14; 15; 18; 19] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [3; 16], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [6; 9; 17] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Ще одним важливим класом розв'язків є стоячі хвилі. В статтях [4; 5; 13; 20; 21] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера.

Метою цієї статті є одержання умов існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці із насичуваною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t)-a_{n,m}\psi_{n+1,m}(t)-a_{n-1,m}\psi_{n-1,m}(t)-b_{n,m}\psi_{n,m+1}(t)-$$
$$-b_{n,m-1}\psi_{n,m-1}(t)-c_{n,m}\psi_{n,m}(t)+\frac{\mu\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2}{1+\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2}\psi_{n,m}(t)=0,\ (n,m)\in\mathbb{Z}^2, \tag{1}$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція $(n,\,m)$-ї частинки, $(a_{n,m})$, $(b_{n,m})\subset\mathbb{R}$, $\mu\neq 0$. Зауважимо, що в статті [10] вивчались двовимірні солітони в подібних рівняннях.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t)=u_{n,m}\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $(u_{n,m})\subset\mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega\in\mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами.

Будемо вивчати стоячі хвилі з k-періодичною амплітудою, тобто відповідно

$$u_{n+k,m}=u_{n,m+k}=u_{n,m}. \tag{3}$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1) і враховуючи, що $\left|\exp(-i\omega t)\right|=1$, одержимо рівняння

$$\omega u_{n,m} - a_{n,m}u_{n+1,m} - a_{n-1,m}u_{n-1,m} - b_{n,m}u_{n,m+1} -$$
$$-b_{n,m-1}u_{n,m-1} - c_{n,m}u_{n,m} + \frac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2} = 0. \tag{4}$$

Позначимо через

$$\left(Lu\right)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m},$$

$$f\left(u_{n,m}\right) = \frac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2}.$$

Тоді рівняння (4) набуде вигляду

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = f\left(u_{n,m}\right). \tag{5}$$

Надалі будемо розглядати більш загальне рівняння (5) з деякою нелінійністю $f\left(u_{n,m}\right)$. Нехай $F\left(t\right)$ первісна функція для функції $f\left(t\right)$, тобто $F\left(t\right) = \int\limits_0^t f\left(s\right)ds.$ Тоді всюди далі припустимо, що виконуються наступні умови:

$\left(i_1\right)$ послідовності $\left(a_{n,m}\right)$ і $\left(b_{n,m}\right)$ періодичні, тобто $a_{n+k,m} = a_{n,m+k} = a_{n,m}$, $b_{n+k,m} = b_{n,m+k} = b_{n,m}$, $c_{n+k,m} = c_{n,m+k} = c_{n,m}$ і нижньою межею спектра оператора L є число 0;

$\left(i_2\right)$ $f\left(t\right) = o\left(t\right)$, $t \to 0$ і $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{f\left(t\right)}{t} = l < \infty$;

$\left(i_3\right)$ $f \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ і $f\left(t\right)t < f'\left(t\right)t^2$, $t \neq 0$;

$\left(i_4\right)$ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{2}f\left(t\right)t - F\left(t\right)\right) = \infty.$

Зауваження 1. За виконання умови $\left(i_1\right)$ оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2, а за виконання умов $\left(i_2\right)$, $\left(i_3\right)$ функція $\dfrac{f\left(t\right)}{\left|t\right|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\dfrac{1}{2}f\left(t\right)t - F\left(t\right)$ строго зростає при $t \geq 0$ і строго спадає при $t \leq 0$.

Варіаційне формулювання задачі. Нехай $k \geq 2$ — ціле число. Тоді через E_k позначимо простір всіх k-періодичних послідовностей $\left(u_{n,m}\right)$, які задовольняють умову (3). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u, v)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$ та нормою

$\|u\|_k = \left(\sum_{(n,\, m)\in Q_k} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де

$$Q_k = \left\{ (n,\, m) \in \mathbb{Z}^2 : -\left[\frac{k}{2}\right] \le n, m \le k - \left[\frac{k}{2}\right] - 1 \right\},$$

$[x]$ — ціла частина x. Іноді ми будемо розглядати l^p-норму на E_k

$$\|u\|_{l_k^p} = \left(\sum_{(n,\, m)\in Q_k} \left| u_{n,m} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Нагадаємо, що при $1 \le p \le q \le \infty$

$$\|u\|_{l_k^q} \le \|u\|_{l_k^p}. \tag{6}$$

Зауважимо, що оператор $L - \omega$ є обмеженим і самоспряженим у просторі E_k. На цьому просторі розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u,\, u)_k - \sum_{(n,\, m)\in Q_k} F(u_{n,m}), \tag{7}$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі E_k. Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. Похідна Гато функціоналу J_k визначається за формулою

$$\langle J_k'(u),\, h \rangle = (L_k u - \omega u,\, h)_k - \sum_{(n,\, m)\in Q_k} f(u_{n,m}) h_{n,m}, \quad u,\, h \in E_k, \tag{8}$$

а його критичні точки є розв'язками рівняння (5) з простору E_k.

Допоміжні леми. Для функціоналу J_k означимо многовид Нехарі

$$N_k := \left\{ u \in E_k \mid \langle J_k'(u),\, u \rangle = 0,\, u \ne 0 \right\} \subset E_k. \tag{9}$$

Введемо позначення $I_k(u) := \langle J_k'(u),\, u \rangle$. Це C^1-функціонал, похідна Гато якого визначається формулою

$$\langle I_k'(u),\, h \rangle = (L_k u - \omega u,\, h)_k - \sum_{(n,\, m)\in Q_k} \left(f(u_{n,m}) + f'(u_{n,m}) u_{n,m} \right) h_{n,m}. \tag{10}$$

Лема 2. Нехай виконуються умови $(i_1)-(i_4)$, $\omega + l > 0$, $\omega < 0$. Тоді множина N_k є непорожнім замкненим C^1-підмноговидом у просторі E_k, на якому $I_k'(u) \ne 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \ge \beta_0$ та $u \in N_k$.

Доведення. Нехай $\delta \in (-\omega, l)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора $L_k - \omega$ в просторі E_k, що відповідає відрізку $[0, \delta]$. Оскільки $-\omega \in \sigma(L_k - \omega)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta \setminus \{0\}$. За умовою (i_2)

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} f(tv_{n,m}) tv_{n,m} =$$

$$= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - o(t^2) > 0$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншого боку,

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} f(tv_{n,m}) tv_{n,m} \le$$

$$\le t^2 \left(\delta \|v\|_k^2 - \sum_{(n,m)\in Q_k} \frac{f(tv_{n,m}) v_{n,m}^2}{tv_{n,m}} \right).$$

За умовою (i_2) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\langle J_k'(tv), tv\rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує $t^* > 0$ таке, що $\langle J_k'(t^* v), t^* v\rangle = 0$ і $t^* v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \varnothing$.

Нехай $u \in N_k$, тоді з рівностей (7) і (9) маємо

$$\langle I_k'(u), u\rangle = \langle I_k'(u), u\rangle - 2I_k(u) = \sum_{(n,m)\in Q_k} \left(f(u_{n,m}) u_{n,m} - f'(u_{n,m}) u_{n,m}^2 \right).$$

За умовою (i_3) ця сума є від'ємною. Тому $I_k'(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію N_k є C^1-підмноговидом в просторі E_k. Замкненість E_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi(r) = \sup\limits_{|t|\le r} \dfrac{f(t)}{t}$.

Це зростаюча функція при $r \ge 0$ і згідно (i_2) $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k - \omega$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівності (6) маємо

$$|\omega| \|u\|_k^2 \le (L_k u - \omega u, u)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} f(u_{n,m}) u_{n,m} \le$$

$$\le \varphi\left(\|u\|_{l_k^\infty}\right) \cdot \|u\|_k^2 \le \varphi\left(\|u\|_k\right) \cdot \|u\|_k^2.$$

А це означає, що $\varphi(\|u\|_k) \ge |\omega|$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \ge \beta_0$, $u \in N_k$.

Зауваження 2. Доведення леми показує, що якщо $J_k(v) \le 0$, то існує єдине $t^* \in (0, 1]$ таке, що $t^* v \in N_k$, а також існує таке $v \in E_k \setminus \{0\}$, що $J_k(v) < 0$.

З рівності (7) випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{(n,\, m) \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_{n,m}) u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right). \quad (11)$$

Лема 3. Існує таке число $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$, що $J_k(u) \ge \alpha_0$ для всіх $u \in N_k$.

Доведення. Нехай $u \in N_k$, тоді

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{(n,\, m) \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_{n,m}) u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right).$$

За лемою 2, $\|u\|_k \ge \beta_0 > 0$. Отже, існують $(n_0, m_0) \in Q_k$ (не залежать від u) і $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (також не залежить від u) такі, що $|u_{n_0}| \ge \delta_0$. Тоді, поклавши $\alpha_0 = \frac{1}{2} f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$, за зауваженням 1 маємо, що $J_k(u) \ge \alpha_0$ для $u \in N_k$.

Лема 4. Якщо $u \in N_k$, то функція $\varphi(t) = J_k(tu)$, $t > 0$ має єдину критичну точку при $t = 1$.

Доведення. Знайдемо похідну

$$\varphi'(t) = \left(\frac{1}{2} \left(L_k(tu) - \omega t u,\, tu \right)_k - \sum_{(n,\, m) \in Q_k} F(t u_{n,m}) \right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^2 \left(L_k(u) - \omega u,\, u \right)_k - \sum_{(n,\, m) \in Q_k} F(t u_{n,m}) \right)' =$$

$$= t \left(L_k(u) - \omega u,\, u \right)_k - \sum_{(n,\, m) \in Q_k} f(t u_{n,m}) u_{n,m} =$$

$$= t \left(\left(L_k(u) - \omega u,\, u \right)_k - \sum_{(n,\, m) \in Q_k} \frac{f(t u_{n,m})}{t u_{n,m}} u_{n,m}^2 \right).$$

Оскільки на N_k

$$\varphi'(1) = \left(L_k u_{n,m} - \omega u_{n,m},\, u_{n,m} \right)_k - \sum_{(n,\, m) \in Q_k} f(u_{n,m}) u_{n,m} = \langle J_k'(u),\, u \rangle = 0,$$

то $t=1$ є критичною точкою функції $\varphi(t)$. Її єдиність випливає зі строгої монотонності функції $\dfrac{f(t)}{t}$.

Основний результат. За лемою 4 точки мінімуму функціоналу J_k на N_k є розв'язками рівняння (5). Тому природно розглянути наступну задачу мінімізації

$$m_k = \inf\left\{J_k(u) : u \in N_k\right\}. \tag{12}$$

Лема 5. Нехай виконуються умови $(i_1)-(i_4)$, $\omega+l>0$, $\omega<0$. Тоді задача (12) має розв'язок.

Доведення. Нехай $\left(u^j\right)$, $u^j \in N_k$ — мінімізуючи послідовність для J_k, тобто $J_k\left(u^j\right) \to m_k$. З рівності (11) маємо

$$J_k\left(u^j\right) = \sum_{(n,\, m)\in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_{n,m}^j\right)u_{n,m}^j - F\left(u_{n,m}^j\right)\right).$$

Тоді умова (i_4) означає, що $\left\|u^j\right\|_{l^\infty}$ обмежена. Оскільки простір E_k скінченновимірний, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на E_k, то послідовність $\left(u^j\right)$ є обмеженою. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $\left(u^j\right)$ збігається до $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. □

Основними результатами цієї статті є наступні дві теореми.

З леми 5 випливає теорема:

Теорема 1. Нехай виконуються умови $(i_1)-(i_4)$, $\omega+l>0$, $\omega<0$. Тоді для будь-якого $k \ge 2$ рівняння (5) має нетривіальний k-періодичний розв'язок $u^{(k)} \in E_k$. Крім того, якщо функція f непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки $\pm u^{(k)} \in E_k$.

Оскільки насичувана нелінійність $f\left(u_{n,m}\right) = \dfrac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2}$, $\mu \ne 0$ задовольняє умови $(i_2)-(i_4)$, то з теореми 1 випливає теорема:

Теорема 2. Нехай виконується умова (i_1), $\omega+\mu>0$, $\omega<0$. Тоді для будь-якого $k \ge 2$ рівняння (4) має два нетривіальні розв'язки $\pm u^{(k)} \in E_k$.

Висновки. Таким чином, у цій статті одержано результат про існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв’язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, № 4. — С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, № 1. — С. 76–88.
4. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 21–29.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, № 1. — С. 78–84.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17–23.
8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 5–12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, № 3. — С. 45–52.
10. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв’язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 3-9.
11. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія:

Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18–24.
12. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С. М. Бак, К. Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 29–36.
13. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. — 1994. — Т. 60, вып. 11. — С. 815–821.
14. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. — Vol. 217, № 2 (August). — P. 187–197.
15. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. — 2017. — Vol. 4 (69). — P. 509–520.
16. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. — 2018. — Vol. 50, № 1. — P. 75–87.
17. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. — 2018. — Vol. 14, № 1. — P. 16–26.
18. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
19. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1 (February). — P. 105–114.
20. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations / A. Pankov // Nonlinearity. — 2006. — № 19. — P. 27–40.
21. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. — 2008. — № 464. — P. 3219–3236.

STANDING WAVES WITH PERIODIC AMPLITUDE IN THE DISCRETE NONLINEAR SCHRÖDINGER TYPE EQUATION WITH SATURABLE NONLINEARITY ON 2D-LATTICE

This paper is devoted to the study of a discrete nonlinear Schrödinger equation on a two-dimensional lattice. This type of equations with saturable nonlinearity is studied. We first consider the Schrödinger type equation with a more general nonlinearity, which has the same properties as saturable nonlinearity. For such equations, we obtain the result of the existence of solutions in the form of standing waves with periodic amplitude (note that such solutions are often called breathers). To do this, the given equation is presented by operator form in the space of two-sided sequences. It is assumed that the coefficients of the corresponding linear operator form k-periodic sequences. This operator is bounded and self-adjoint in the space of all k-periodic sequences. Then a special functional was constructed, the critical points of which in this space are solutions of the original equation. A Gateaux derivative of this functional is found. Next we consider the Nehari manifold for a given variational problem, which is a set of nontrivial critical points of a constructed functional in the space of k-periodic sequences. It is shown that this manifold is a non-empty and closed subset of a given space. In addition, the corresponding minimization problem is considered and it is shown that this problem has a solution in the Nehari manifold. Consequently, under these conditions the original equation has nontrivial periodic solutions. Finally, due to the fact that saturable nonlinearity satisfies these conditions, the existence of two nontrivial standing waves with k-periodic amplitude for a discrete nonlinear Schrödinger equation with saturable nonlinearity on a two-dimensional lattice is established. The results of this paper are the distribution of already known results for discrete nonlinear Schrödinger equations on 1D and 2D-lattices.

Key words: *discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, Nehari manifold, saturable nonlinearity.*

Отримано: 14.11.2018

UDC 519.6
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.14-24

A. Ya. Bomba, Doct. of Techn. Sciences,
M. V. Boichura
Rivne State Humanitarian University, Rivne

NUMERICAL COMPLEX ANALYSIS METHOD FOR PARAMETERS IDENTIFICATION OF ANISOTROPIC MEDIA USING APPLIED QUASIPOTENTIAL TOMOGRAPHIC DATA. PART 1: PROBLEM STATEMENT AND ITS APPROXIMATION

The approach to the solving of gradient problems of parameters identification of quasiideal fields with using applied quasipotential tomographic data based on numerical complex analysis methods is transferred to cases of anisotropic media. We, similar to the existing works of world scientists, some additional information about the nature of the distribution of conductivity inside the domain (research object) is considered a priori known. However, in opposite to the traditional approaches to the statement and solving the problems of electrical impedance tomography, we set the local velocities distribution of a substance (liquid, current) in addition to the averaged potential at the contact sections of plate and body and at other sections (stream lines), we set the potential distribution (according to experimental data, which we approximate using splines, Bezier curves, etc.). Generation of initial data at the boundary of the investigated object is carried out in accordance with the polar model of current injection and a given sum of eigenvalues of the conductivity tensor of