

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ

Вінницький національний аграрний університет

Клочко О.В., Клочко В.І., Потапова Н.А.

Методи оптимізації в економіці

Навчальний посібник

Вінниця
Видавництво «Вінницька газета»
2013

УДК 001.891:330.36(07)

ББК 65.012.2я7

К 50

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-15279 від 01.10.2012 р.)*

Рецензенти:

Прутська О.О. – д.е.н., проф., зав. кафедрою менеджменту
зовнішньоекономічної діяльності ВНАУ

Михалевич В.М. – д.т.н., проф., зав. кафедрою вищої математики
Вінницького національного технічного університету

Ткачук О.М. – д.е.н., професор Вінницького торговельно-економічного
інституту Київського національного торговельно-економічного
університету

Ключко О.В., Ключко В.І., Потапова Н.А.

К 50 **Методи оптимізації в економіці:** Навчальний посібник. –

Вінниця: Вінницька газета, 2013. – 456 с.

ISBN 978-966-2257-45-8

У посібнику викладено основи теорії та методів оптимізації. Зокрема розглянуті концептуальні засади теорії оптимізації в економіці; історія розвитку теорії оптимізації; основні поняття та постановка задачі оптимізації; умови існування розв'язків оптимізаційних задач; приклади економічних оптимізаційних задач та їх формалізація; основні класи оптимізаційних задач; класичний метод пошуку екстремуму функції однієї змінної; дослідження функцій однієї змінної за допомогою похідних; основні напрями використання класичного методу пошуку екстремуму функції однієї змінної в економічних дослідженнях; класичний метод пошуку екстремуму функції багатьох змінних; загальні положення теорії опуклого програмування; чисельні методи оптимізації функцій однієї змінної; основні класи чисельних методів оптимізації функцій багатьох змінних; основні оптимізаційні моделі економічних процесів і систем; прикладні теорії і методи оптимізації в економіці: основи лінійного програмування, симплексний метод, транспортна задача, цілочисельне програмування, задачі теорії ігор, метод множників Лагранжа, методи оптимального управління, динамічного програмування, стохастичного програмування, теорія графів, сіткове планування; розв'язування оптимізаційних задач за допомогою комп'ютера.

Навчальний посібник призначено для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів; і буде корисним викладачам, які читають курси методів оптимізації, аспірантам, науковцям, які займаються проблемами розв'язування оптимізаційних задач та особливостями їх застосування в економіці.

УДК 001.891:330.36(07)

ББК 65.012.2я7

ISBN 978-966-2257-45-8

© Ключко О.В., Ключко В.І., Потапова Н.А., 2013
© Оригінал-макет, обкладинка –
видавництво «Вінницька газета», 2013

ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Концептуальні засади теорії оптимізації в економіці, класичні методи оптимізації	9
1.1. Історія розвитку теорії оптимізації.....	9
1.2. Основні поняття та постановка задачі оптимізації.....	19
1.3. Умови існування розв'язків оптимізаційних задач.....	27
1.4. Приклади економічних оптимізаційних задач та їх формалізація	33
1.5. Основні класи оптимізаційних задач	54
1.6. Класичний метод пошуку екстремуму функції однієї змінної	61
1.7. Дослідження функцій однієї змінної за допомогою похідних.....	68
1.8. Основні напрями використання класичного методу пошуку екстремуму функції однієї змінної в економічних дослідженнях	72
1.9. Класичний метод пошуку екстремуму функції багатьох змінних.....	78
1.10. Загальні положення теорії опуклого програмування.....	88
Розділ 2. Чисельні методи оптимізації	93
2.1. Основні класи чисельних методів оптимізації функцій однієї змінної.....	93
2.2. Основні класи чисельних методів оптимізації функції багатьох змінних	96
2.3. Методи виключення інтервалів.....	102
2.4. Методи поліноміальної апроксимації.....	118
2.5. Методи з використанням похідних.....	127
2.6. Методи безумовної градієнтної оптимізації.....	142
2.7. Методи умовної градієнтної оптимізації. Методи штрафних функцій.....	155
2.8. Методи випадкової оптимізації.....	167
2.9. Методи стохастичного програмування	170
Розділ 3. Прикладні теорії і методи оптимізації в економіці.....	200
3.1. Основи лінійного програмування. Симплексний метод.....	200
3.2. Цілочисельне програмування.....	237
3.3. Транспортна задача. Метод потенціалів.....	248
3.4. Метод множників Лагранжа.....	268
3.5. Задачі оптимального управління	270
3.6. Методи динамічного програмування	275
3.7. Задачі теорії ігор.....	285
3.8. Теорія графів. Сіткове планування.....	311

Розділ 4. Оптимізаційні моделі економічних процесів і систем	328
4.1. Оптимізація виробничої діяльності. Виробничі функції. Теорія фірми	328
4.2. Оптимізаційні задачі виробника	334
4.3. Оптимізаційні задачі споживача	346
4.4. Оптимізаційна задача страхування	352
4.5. Оптимізаційна задача планування виробництва	354
4.6. Оптимізаційні задачі логістики	366
4.7. Оптимізаційні задачі управління ризиками	379
4.8. Моделі оптимального інвестування	389
Розділ 5. Розв'язування оптимізаційних задач за допомогою комп'ютера	398
5.1. Розв'язування оптимізаційних задач за допомогою математичних комп'ютерних систем	398
5.2. Розв'язування оптимізаційних задач за допомогою табличних процесорів	405
Відповіді на тестові завдання та задачі для самостійного виконання	418
Список позначень	427
Список літератури	427
Предметний та іменний покажчики	436
Допоміжні матеріали	446

ПЕРЕДМОВА

Управління економікою держави потребує особливої уваги в період трансформацій, вимагає від фахівців економічної галузі глибоких теоретичних знань та практичних навичок у вирішенні принципово нових управлінських завдань, що може бути досягнуто лише в процесі систематичної навчальної та науково-дослідної роботи студентів. Завданням керівника будь-якого рівня управління є прийняття найкращого рішення з урахуванням умов впливу, пов'язаного з вибором оптимального варіанту функціонування об'єкта управління. Оптимізацією є цілеспрямована діяльність, що полягає в одержанні найкращих результатів з урахуванням відповідних умов. Оптимізація широко застосовується в науці, техніці, економіці й у будь-якій іншій сфері людської діяльності. Процес оптимізації лежить в основі всієї економічної діяльності, оскільки функції фахівця-економіста полягають у розробці більш ефективних стратегій управління підприємством. У багатьох випадках задача пошуку оптимального рішення може бути формалізована і розв'язана методами оптимізації.

Пошуки оптимальних рішень призвели до створення спеціальних математичних методів, і вже у XVIII сторіччі були закладені математичні основи оптимізації (варіаційне числення, чисельні методи й ін.). Однак до другої половини XX століття методи оптимізації у багатьох галузях науки і техніки застосовувалися рідко, оскільки практичне використання математичних методів оптимізації вимагало громіздкої обчислювальної роботи, що без персонального комп'ютера реалізувати було важко, а в ряді випадків — неможливо. Значні утруднення виникали в процесі розв'язування задач оптимізації через значну кількість параметрів та їх складний взаємозв'язок. За умови використання персональних комп'ютерів процес розв'язування задач значно спрощується.

Дисципліна «Методи оптимізації в економіці» досліджує питання побудови оптимізаційних моделей, методів пошуку оптимального рішення, питання економічної теорії, які допускають постановку оптимізаційних задач, лінійне та нелінійне програмування, дискретне програмування, стохастичне програмування, теорію ігор, оптимізаційні задачі на графах. Важливими розділами нелінійного програмування є квадратичне та опукле програмування. Тому особлива увага в курсі методів оптимізації приділяється опуклому аналізу, він використовується для обґрунтування чисельних методів оптимізації. За допомогою теорії ігор можна моделювати різні економічні та технологічні процеси. Багато питань управління пов'язані з оптимальним керуванням, зокрема, пошуком найкращого (оптимального) розподілу ресурсів, вибором оптимального варіанта роботи (об'єкта, процесу) з множини альтернативних варіантів тощо.

У практичній діяльності економіста з багатьох можливих рішень поставленого завдання необхідно обрати оптимальне. Наприклад, з декількох варіантів перевезення плодоовочевої продукції споживачам необхідно обрати найбільш дешевий, але такий, що враховує обмеження на припустимі терміни постачань; з можливих планів розпилу дерев'яних дощок обрати такий, що дозволить виконати план при найменшій кількості відходів і под.

Курс «Методи оптимізації в економіці» дає змогу вирішувати питання оптимального управління, аналізу оптимальних напрямів розвитку економічних об'єктів і процесів; формує у майбутніх фахівців стиль аналітичного мислення щодо вибору й побудови оптимізаційних моделей, аналізу та інтерпретації результатів. Значна увага приділяється чисельним методам та алгоритмам оптимізації, їх властивостям та питанням їх розв'язування з використанням комп'ютерної техніки. Особливістю даного навчального посібника є його міждисциплінарний характер, що сприяє формуванню широкого світогляду фахівців, набуттю практичного досвіду пошуку і реалізації оптимальних управлінських рішень у великій кількості ситуацій і масивів різномірної інформації. Це забезпечується ґрунтовно

сформованими розділами теоретичного матеріалу та прикладами реалізації отриманих знань на основі економічних задач, зокрема, менеджменту, маркетингу, планування, прогнозування, контролінгу, логістики тощо.

Метою даної дисципліни є формування системи теоретичних знань та практичних навичок з питань постановки та розв'язування оптимізаційних економічних задач.

Дисципліна формує у майбутніх фахівців стиль аналітичного мислення щодо вибору і побудови моделей, аналізу та інтерпретації результатів. Спираючись на цю науку, підприємства та організації мають можливість проаналізувати оптимальні напрями розвитку економічних об'єктів і процесів.

Завданнями курсу є: дослідження особливостей та структури оптимізаційних моделей в економіці; обґрунтування ролі методів оптимізації у дослідженні об'єктів і процесів економіки, управлінні економічними системами; вивчення технік і методів оптимізації; вивчення методів оцінки оптимізаційних моделей; вивчення основних економічних оптимізаційних моделей; набуття навичок використання побудованих оптимізаційних моделей в економіці; набуття навичок розв'язування оптимізаційних задач з використанням комп'ютерної техніки та відповідного програмного забезпечення.

Зміст дисципліни розкривається у таких темах: концептуальні засади теорії оптимізації в економіці; історія розвитку теорії оптимізації; основні поняття та постановка задачі оптимізації; умови існування розв'язків оптимізаційних задач; приклади економічних оптимізаційних задач та їх формалізація; основні класи оптимізаційних задач; класичний метод пошуку екстремуму функції однієї змінної; дослідження функцій однієї змінної за допомогою похідних; основні напрями використання класичного методу пошуку екстремуму функції однієї змінної в економічних дослідженнях; класичний метод пошуку екстремуму функції багатьох змінних; загальні положення теорії опуклого програмування; чисельні методи оптимізації функцій однієї змінної; основні класи чисельних методів

оптимізації функції багатьох змінних; методи виключення інтервалів, поліноміальної апроксимації, методи з використанням похідних, безумовної градієнтної оптимізації, умовної градієнтної оптимізації, штрафних функцій, випадкової оптимізації, стохастичного програмування; основні оптимізаційні моделі економічних процесів і систем; теорія фірми; оптимізаційні задачі виробника, споживача, страхування, планування виробництва, логістики, управління ризиками, інвестування; прикладні теорії і методи оптимізації в економіці: основи лінійного програмування, симплексний метод, транспортна задача, цілочисельне програмування, задачі теорії ігор, метод множників Лагранжа, методи оптимального управління, динамічного програмування, стохастичного програмування, теорія графів, сіткове планування; розв'язування оптимізаційних задач за допомогою комп'ютера.

Вивчення дисципліни базується на вимогах освітньо-професійної програми та освітньо-кваліфікаційної характеристики з даної спеціальності; інформатичних, суспільно-економічних, фундаментальних дисциплінах, зокрема вищій математиці, інформаційних технологіях, економічній теорії, менеджменті, маркетинзі, економіко-математичному моделюванні та ін.

Предметом дисципліни є методи і моделі оптимізації в економіці.

У результаті вивчення курсу студенти повинні знати: класифікацію оптимізаційних задач; теорію оптимізації; методи рішення задач оптимізації в економіці; функціональні можливості застосування методів оптимізації в економіці.

Студенти повинні вміти: формулювати і класифікувати задачі оптимізації; здійснювати постановку задач та побудову економіко-математичних оптимізаційних моделей; обирати методи рішення задач оптимізації; виконувати аналіз ефективності розроблених методів рішення оптимізаційних задач; визначати можливості використання методів оптимізації в економіці.

Вивчення дисципліни повинно забезпечувати розв'язання двох взаємопов'язаних проблем: пізнання теоретичних основ науки оптимізації та набуття практичних навичок у розв'язуванні питань побудови, дослідження та використання оптимізаційних моделей в економіці.

РОЗДІЛ 1

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ТЕОРІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕКОНОМІЦІ, КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1. Історія розвитку теорії оптимізації

Питання про вибір найкращого варіанта серед множини альтернативних варіантів цікавило людей з давніх часів. Люди завжди прагнули обрати найкращий варіант з багатьох існуючих, який називають оптимальним (лат. *optimus* – найкращий, досконалий). З метою пошуку найкращого варіанта задачі розв'язують на знаходження максимального чи мінімального значення, які об'єднують одним поняттям – екстремум (лат. *extremum* – крайній). Тому задачі знаходження максимуму чи мінімуму певних показників отримали назву екстремальних задач, а методи їх розв'язування є основою теорії оптимізації.

Проблема пошуку найкращого рішення виникла із зародженням людства і є рушійною силою розвитку цивілізації. Із зародженням суспільних відносин формувалась економічна наука, метою якої є ефективне управління суспільними господарськими системами, зокрема господарствами, бізнесом, фінансами, військовою справою, освітою, релігією, наукою. Пройшовши складний шлях формування і вдосконалення крізь різні епохи, пошук оптимальних рішень в економіці на сьогоднішній день є одним з актуальних завдань в усіх економічних сферах. Перші оптимальні рішення людина приймала в процесі розподілу, обміну, збуту, землеробства, тваринництва, керуючись при цьому елементарними розрахунками та міркуваннями. Із розвитком перших великих господарських систем стародавнього Єгипту і Вавилону, Греції зароджувалася наука оптимального управління суспільством, господарством, виробництвом, збутом. Із розвитком та збагаченням певних територій почали загострюватися питання розв'язання протиріч між державами, народами, національними і соціальними групами. Під час збройних конфліктів, освоєння нових територій, повстань, заколотів починає розвиватись теорія вибору оптимальних стратегій ведення військових дій, прийняття оптимальних

рішень у політиці, дипломатії, інформаційній війні. Тривалий час не існувало загальних прийомів пошуку розв'язку екстремальних задач. Лише в XVII столітті з'явилися перші загальні прийоми пошуку розв'язків практичних екстремальних задач у геометрії, фізиці, механіці. Наприкінці 30-х років XX століття була розроблена й застосована для розв'язування задач виробництва теорія лінійного програмування. Створення цієї теорії у 40-х роках XX століття сприяло розвитку теорії опуклого аналізу і нелінійного програмування. Сьогодні методи оптимізації розвиваються відповідно до потреб їх застосування та можливостей реалізації. Так, із розвитком комп'ютерної техніки розроблялися та вдосконалювалися чисельні методи у напрямках вибору оптимальних параметрів обчислювальних процесів, найкращого наближення функцій, наближеного розв'язування систем нелінійних нерівностей та рівнянь. В умовах оптимального здійснення виробничих процесів, збереження екосистеми нашої планети, економії виробничих ресурсів, зокрема вичерпних корисних копалин, енергії, трудових ресурсів постають завдання їх оптимального використання. Наприклад, задачі отримання максимального прибутку за заданих обмежень на ресурси, мінімальних витрат на перевезення продукції за умови задоволення потреб споживачів та вивезення продукції зі складу, розрахунок оптимального режиму роботи електростанцій, оптимального використання земельних ресурсів, оптимального календарного графіка виконання робіт та інші. Сьогодні, окрім раціоналізації виробничих процесів, стають актуальними задачі розрахунку оптимальних стратегій поведінки ринкових суб'єктів, задачі прийняття оптимальних рішень, управління економічними системами.

Дослідження екстремальних задач почалося біля 25 століть тому. Екстремальні задачі досліджувало багато античних математиків і філософів, про них писали у своїх творах Архімед, Герон, Аполлоній, Евклід у «Початках» та інші. Першою екстремальною задачею вважають класичну задачу ізопериметрії. Ізопериметричними називають криві, які мають однаковий периметр. Задача ізопериметрії формулюється, наприклад, таким чином: серед

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

R^n – n -вимірний евклідовий простір;

$R = R^1$ – множина дійсних чисел;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор-рядок у просторі R^n ;

$O_n = (0, 0, \dots, 0)$ – нуль-вектор у просторі R^n ;

$x \in X$ – елемент x належить множині X ;

$x \notin X$ – елемент x не належить множині X ;

$x \neq y$ – x не дорівнює y ;

\emptyset – порожня множина;

(α, β) – відкритий інтервал $\{x | \alpha < x < \beta\}$;

$[\alpha, \beta]$ – замкнений інтервал $\{x | \alpha \leq x \leq \beta\}$;

$\{x, y, \dots, z\}$ – множина, яка складається із елементів x, y, \dots, z ;

$\max\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – максимальний елемент із множини $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$;

P {подія S } – ймовірність події S ;

Ω – простір елементарних подій ω ;

\forall – квантор загальності;

$\forall x \in X$ – «для будь-якого x з множини X »;

\exists – квантор існування;

$\exists x \in X$ – «існує хоча б один x з множини X »;

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ – евклідова норма вектора x у просторі R^n ;

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ – скалярний добуток векторів x та y в просторі R^n ;

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ – відстань між двома точками x та y в просторі R^n ;

$\{x \in X / P\}$ – підмножина елементів множини X , які мають властивість P ;

$X \subseteq Y$ – множина X є підмножиною множини Y ;

XUY – об'єднання множин X та Y ;

$X \cap Y$ – перетин множин X та Y ;

A^T – матриця, транспонована до матриці A ;

A^{-1} – матриця, обернена до квадратної матриці A ;

E – одинична квадратна матриця;

$\det A$ – визначник квадратної матриці A ;

$L_\alpha = \{x \in R^n \mid f(x) \leq \alpha, \alpha \in R^1\}$ – Лебегова множина функції f ;

$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}$ – частинна похідна функції f у точці x^* з області визначення функції f

за змінною x_i ;

$\nabla f(x^*) = f'(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right)$ – градієнт функції f у точці x^* ;

$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}$ – друга частинна похідна функції f в точці x^* з області визначення

функції f за змінними x_i та x_j ;

$f''(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$ – матриця других частинних похідних функції f у точці

x^* , яка належить області визначення функції f ;

$\inf_{x \in X} f(x)$ – точна нижня межа числової функції $f(x)$ на X ;

$\sup_{x \in X} f(x)$ – точна верхня межа числової функції $f(x)$ на X ;

$\min_{x \in X} f(x)$ – мінімальне (найменше) значення числової функції $f(x)$ на X ;

$\max_{x \in X} f(x)$ – максимальне (найбільше) значення числової функції $f(x)$ на X ;

$x^* = \arg \min_{x \in X} f(x)$ – довільна точка глобального мінімуму функції $f(x)$ на X ;

$X^* = \text{Arg} \min_{x \in X} f(x)$ – множина точок глобального мінімуму функції $f(x)$ на X ;

$x^* = \arg \max_{x \in X} f(x)$ – довільна точка глобального максимуму функції $f(x)$ на X ;

$X^* = \text{Arg} \max_{x \in X} f(x)$ – множина точок глобального максимуму функції $f(x)$ на X ;

M_ζ – математичне сподівання випадкової величини ζ ;

D_ζ – дисперсія випадкової величини ζ .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М, Фомин С. В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
3. Ананий В. Левитин. Глава 9. Жадные методы: Алгоритм Дейкстры // Алгоритмы: введение в разработку и анализ = Introduction to The Design and Analysis of Algorithms. – М.: «Вильямс», 2006. – С. 189–195. – ISBN 0–201–74395–7
4. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с. – (Серия «Высшее образование»). ISBN 5–16–001580–9.
5. Афоничкин А.И. и др. Разработка бизнес-приложений в экономике на базе MS EXCEL: Учеб. / [А. И. Афоничкин, В. Л. Акимов, Е. А. Афоничкина и др.]; Под общ. ред. А. И. Афоничкина. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 416 с. ISBN 5–86404–174–2.
6. Ашманов С. А. Линейное программирование. – М. Наука, 1981.
7. Базилевич В.Д., Гражевська Н.І., Гайдай Т.В., Леоненко П. М., Нестеренко А. П. Історія економічних учень: Підручник / Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка / Віктор Дмитрович Базилевич (ред.). – К.: Знання, 2004. – 1300 с.: іл. – (Серія «Класичний університетський підручник»). – Бібліогр.: в кінці розд. – ISBN 966–8148–14–2.
8. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988
9. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974. 368с.
10. Батищев Д.И. Генетические алгоритмы решения экстремальных задач / Под ред. Львовича Я. Е.: Учеб. пособие. – Воронеж, 1995.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.
12. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.
13. Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов. – М.: Высш. школа, 1976. – С. 392.

14. Бодров В.И., Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Математические методы принятия решений: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. – 124 с. ISBN 5–8265–0259–2.
15. В.А. Охорзин. Прикладная математика в системе MATHCAD Учебное пособие. 3-е изд. СПб.: Лань, 2009, 352 с. ISBN: 978–5-8114–0814–6.
16. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов.– 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 552 с.– ISBN 5–02–013796–0.
17. Васильков Ю.В., Василькова. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании [Текст]: учебное пособие для студ. вузов, обуч. по эконом. спец. – Москва: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.: ил.; 21 см. – ISBN 5–279–02098–2
18. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 553 с.
19. Вітлінський В.В., Верченко П.І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
20. Вітлінський В.В., Верченко П.І., Сігал А.В., Наконечний Я.С. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. Посібник / За ред. В.В.Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
21. Воробьев Н.Н. Теория игр. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
22. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании: – М.: Сов радио, 1966.- 524 с.
23. Гупал А.М. Стохастические методы решения негладких экстремальных задач. – К.: Наукова думка, 1979. –152 с.
24. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. – М.: Прогресе, 1966. – 600 с.
25. Дж. фон Нейман О. Моргенштерн Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. под ред. и с доб. Н.Н. Воробьева. Главная редакция физико-математической литературы, изд-ва «Наука», 1970.

26. Джонсон Д., Вуд Д., Вордлоу Д., Мэрфи-мл. П. Современная логистика. 8-е изд. – М.: Издательский дом Вильямс, 2009. ISBN 978-5-8459-0969-5.
27. Дубина А., Орлова С., Шубина И., Хромов А. Excel для экономистов и менеджеров. Экономические расчёты и оптимизационное моделирование в среде Excel. – СПб.: Питер, 2004. – 295 с.: ил. ISBN 5-94723-700-8.
28. Дьяконов В. Mathcad 2000: учебный курс. – СПб.: Питер, 2000. – 592 с.
29. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
30. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с. ISBN 978-966-654-242-0.
31. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. -384 с.
32. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
33. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. -М.: Наука, 1979. -247 с.
34. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. -608 с. – ISBN 966-8756-04-5.
35. Жиглявский А.А. Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.– 248 с. – ISBN 5-02-0104257-3.
36. Жилинскас А., Шатлянис В. Поиск оптимума: компьютер расширяет возможности. – М.: Наука, 1989, с. 79. – ISBN 5-02-006737-7.
37. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование: Пер. С англ./Под ред. Е.Г. Гольштейна.-М.: Сов радио, 1973.- 312 с.
38. Зыков А. А. Основы теории графов. – М.: «Вузовская книга», 2004. – С. 664. – ISBN 5-9502-0057-8(М.: Наука, 1987. 383с.)
39. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб. Для вузов. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с. – (Курс вещей математики и математической физики). – ISBN 5-9221-0536-1.

40. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. – 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 464 с. – (Курс вiстей математики и математической физики). – ISBN 5–9221–0536–1.
41. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.: ил. – (Высшее образование). ISBN 5–8112–0042–0.
42. Исследование операций. Методологические основы и математические методы: Пер. с англ./ Под ред. И.М. Макарова, И.М. Бескровного.-М.: Мир, 1981.- Т.1.-712 с.
43. Итерационные методы в теории игр и программировании / Под. ред. В. З. Беленького, В. А. Волконского и др. – М.: Наука. – 1974.
44. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учеб. пособие.– 5-е изд., стереотип.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.– 264 с.– ISBN 5–9221–0170–6.
45. Кiгель В.Р. Математичнi методи прийняття рiшень у ефективному пiдприємствi: [монографiя] / В.Р.Кiгель. – К.: IEУГП, 1999. – 269 с.: Іл. – 19, Бiблiогр.: – с. 259–265. ISBN: 966–95510–6–4.
46. Кормен Т. Х. и др. Часть VI. Алгоритмы для работы с графами // Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. – 2-е изд. – М.: Вильямс, 2006. – С. 1296. – ISBN 0–07–013151–1
47. Коршунов В. А., Фролов Е. Б. Моделирование и оптимизация в менеджменте и логистике. – Ваш Домъ, 2009. ISBN 978–5–98204–044–2.
48. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
49. Крикавський С.В. Логiстика для економістів: Пiдручник. – Л.: Вид-во Над ун-ту «Львiвська полiтехнiка», 2004. – 448 с.
50. Лавренов С. М. Excel: Сборник примеров и задач. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 336 с.: ил. – (Диалог с компьютером). ISBN 5–279–02130–X.
51. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 392 с.

52. Ляшенко И.Н, Карагодова Е.А, Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. Издательское объединение «Вища школа», 1975. – 372 с.
53. Мертенс А. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории. – Киев: Киевское инвестиционное агентство, 1997. – 432 с.
54. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
55. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971.
56. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.. Методы оптимизации. – М.: «Наука», 1978. – 351 с.
57. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – Київ: 2003. 380 с. ISBN 966–7652–15–7.
58. Монако Т.П. Роль математики в професійному становленні студентів економічних спеціальностей / Т.П. Монако // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. Випуск VI: В 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2006. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 224–228.
59. Наконечний С.І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с. ISBN 966–574–538–7.
60. Нурминский Е.А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. – Киев: Наукова думка, 1979. -160 с.
61. Охорзин В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 144 с.: ил. ISBN 5–279–02918–1.
62. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Сьоміна С. А. Теорія ігор: Учеб. посібник для ун-тов – М.: Вища. шк., Книжковий будинок «Університет», 1998. – С. 304. – ISBN 5–06–001005–8, 5–8013–0007–4.
63. Плотников А.Д. Математическое программирование = экспресс-курс – 2006. – С. 171. – ISBN 985–475–186–4.

64. Под ред. Дж. Ферна и Ли Спаркса Логистика и управление розничными продажами = Logistics and retail management. - 2-е. - Новосибирск: Сибирское университетское изд-во, 2007. - С. 263. - ISBN 5-379-00303-6.
65. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 384.
66. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.. – М.: Наука, 1976.
67. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
68. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебник. – М.: КДУ, Высш. шк., 2002. – 288 с. ISBN: 5-8013-0157-7.
69. Рокаффелор Р. Выпуклый анализ: Пер. с англ./Под ред. А.Д. Иоффе, В.М. Тихомирова.-М.: Мир, 1973.- 469 с.
70. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. Информационно-статистический подход.–М.: Наука, 1978.– 240 с.
71. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.– 368 с.– ISBN 5-9221-0559-0.
72. Таньков К.М., Тридід О.М., Колодязева Т.О. Виробнича логістика: Навч. посіб. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2004. – 352 с.
73. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с: ил. – Парал. тит. англ. – ISBN 0-13-032374-8.
74. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. – 2-е изд. – М.: «Вильямс», 2006. – С. 1296. – ISBN 0-07-013151-1
75. Уилсон Р. Введение в теорию графов. Пер с англ. М.: Мир, 1977. 208 с.
76. Федоров В.В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979.
77. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации: Пер. с англ./Под ред. Е.Г. Гольштейна. -М.: Мир, 1972.- 240 с.

78. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. I / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с. – ISBN 5–9221–0156–0.
79. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 810 с. – ISBN 5–9221–0156–0.
80. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. III. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 662 с. – ISBN 5–9221–0156–0.
81. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
82. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Дж. В. Инвестиции. Investments. М.: ИНФРА-М, 2010. – 1028 с. ISBN: 978–5-16–002595–7.
83. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с. ISBN 5–238–00113–4.
84. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.
85. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Теория и конечные методы. – М.: Наука, 1969.
86. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования.- М.: Изд-во: Красанд, 2010. – 394 с. ISBN 978–5-396–00162–6.
87. Coyle J., Bardi E., Langley C. Zarzadzanie logistyczne. – Warszawa: PWE, 2002. – 734 s.
88. Diestel R. Graph Theory, Electronic Edition. – NY: Springer-Verlag, 2005. – С. 422.
89. E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. // Numerische Mathematik. V. 1 (1959), P. 269–271
90. Fletcher R., Powell M. J. D. A rapidly convergent descent method for minimization // Comp. J., 6, 1963. – P. 163–168.
91. Markowitz H. M. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments / H. M. Markowitz. – Oxford; N.Y.: Blackwell, 1991. – 384 p.

ПРЕДМЕТНИЙ ТА ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИКИ

А

Антиградієнт функції 79, 143–146, 151
Архімед 10

Б

Бернуллі І. 14, 15
Бернуллі Я. 15
Брахістохрона 14, 15

В

Варіаційне числення 5, 13–16, 270, 272, 273
Вектори лінійно незалежні 204
Випадковий пошук 97, 167, 168, 239
Відкрита модель 249
Відкрита куля 29

Г

Генетичні алгоритми 167
Герон 10
Гіперплощина 348
Глушков В. М. 17
Гра 285–286
Градiєнт 78, 143–146, 151
Градiєнтний метод 142–145
Границя 28, 30, 61–62, 74–75
Граничне значення 72

Д

Данціг Дж. Б. 16, 171, 201
Двоїста задача 222, 226–230
Двоїсті 220, 225–228
Достатня умова локального екстремуму 65

Е

Егерварі Е. 15
Еджуорт Ф. 328

Ейлер Л. 13, 14, 15, 312
Екстремум 9, 20, 30, 61, 63–65, 68, 72, 78–79, 81–82
Еластичність 75
Електронні таблиці MS Excel 405

Є

Єрмольєв Ю. М. 17

З

Задача

- багатетапна 173
- багатокритеріальна 55
- безумовної оптимізації 20
- брахістохрону 14
- варіаційного числення 14, 270
- вибору проектів 46
- виробника 57, 334
- двоетапна 173, 190
- двоїста 222, 227
- динамічного програмування 275–277
- дискретного програмування 57
- Дідони 11
- дробово-лінійного програмування 56
- ефективність виконання робіт 37
- з жорсткими обмеженнями 172
- з однією змінною 54
- з однією змінною без обмежень 55
- завантаження обладнання 41
- ізопериметрична 10, 12
- з ймовірнісними обмеженнями 172
- квадратичного програмування 56
- комівояжера 372
- лінійного програмування 16, 55, 200–201, 203–205, 211–215
- множників Лагранжа 262
- загальна 203
- канонічна 204
- логістики 366
- максимізації 20

- максимізації потоку мережі 377
- математичного програмування 13, 17
- M-задача 221
- мінімізації 20
- мінімізації вартості потоку мережі 377
- нелінійного програмування 56
- несумісна 20
- одновимірного програмування 54
- одновимірної безумовної оптимізації 55
- одновимірної оптимізації 54
- одноетапна 173, 186
- однокритеріальна 55
- оперативного стохастичного програмування 172, 183
- оптимального інвестування 389
- оптимального управління 17, 57
- оптимізації 19, 20
- оптимізації багатьох змінних 55
- оптимізації сіткових графіків 317
- оптимізації функції n змінних 55
- опуклого програмування 90–91, 262–263
- параметричного програмування 57
- перспективного стохастичного програмування 171, 179
- планування виробництва 33, 201, 354
- пошуку екстремуму 20
- пряма 227–228
- розкрою матеріалу 39
- розподілу площ під сільськогосподарські культури 215
- розширена 221–223
- складання раціону 200
- собівартості 44
- споживача 346
- статистичними обмеженнями 172
- стохастичного програмування 56, 171
- страхування 57, 348
- сумісна 20
- теорії ігор 280
- транспортна 35, 57, 202, 245
- умовної оптимізації 20

- управління ризиками 379
 - фірми 328–329
 - цілочисельного програмування 55, 237
 - частково цілочисельна 237
- Замкнена куля 29
- Золотий переріз 108

К

- Канторович Л. В. 15, 16, 201
- Квадратична форма 79
- від'ємно визначена 80
 - додатно визначена 79
 - знаковизначена 80
 - знакозмінна 80
 - квазізнаковизначена 80
 - невід'ємно визначена 80
 - недодатно визначена 80
- Кейнс Дж. М. 329
- Кларк Дж. Б. 328
- Компакт 29
- Критерій ефективності 185
- Сильвестра 81
 - якості 184–185, 270
- Куля 29
- відкрита 29
 - замкнена 29
- Кун Г. 17
- Купманс Т. Ч. 16
- Кутові мінори матриці 79

Л

- Лагранж Ж. 13–16, 262
- Лебегова множина 30
- Лежандр А. 15
- Лейбніц Г. В. 12–15
- Лінійна комбінація точок 89, 211
- Лінійне програмування 55, 200

М

- Максимум 20–22
- Математичне програмування 13, 17
- Математична комп'ютерна система Maple 398
 - MathCad 398–403
 - MatLab 398–399
 - Mathematica 398
- Матриця Гессе (гессіан) 81
- Матриця гри 283
- Метод бар'єрних функцій 156
 - випадкового пошуку 97
 - відтинання 239
 - внутрішньої точки 156
 - геометричний 205
 - гілок і меж 239
 - Гоморі 239–242
 - динамічного програмування 8, 275
 - дихотомії 105
 - дотичних 94, 127
 - Ерроу-Гурвіца 97, 155
 - золотого перерізу 107
 - ламаних 111
 - квадратичних функцій 119
 - М-метод 221
 - множників Лагранжа 262, 265
 - найшвидшого спуску 144, 151
 - Ньютона 94, 127
 - парабол 119
 - Пауелла 119
 - покоординатного спуску 97
 - поліноміальної апроксимації 94, 118
 - полічисельної інтерполяції 94
 - половинного ділення 94, 105
 - послідовного перебору 111
 - потенціалів 245, 250
 - проекції градієнта 97, 155
 - проекції субградієнта 97
 - середньої точки 94, 135

- симплексний 97, 211
 - сканування 94, 112
 - стохастичних квазіградієнтів 194
 - субградієнта 97
 - січних 131
 - скорочення нев'язок 194
 - спряжених градієнтів 97
 - стохастичних квазіградієнтів 194
 - стохастичної апроксимації 172, 194
 - субградієнтний 97
 - умовної градієнтної оптимізації 155
 - управління запасами 336
 - Фібоначчі 94
 - Франка-Вулфа 144
 - хорд 94, 131
 - штучного базису 221
 - штрафних функцій 97, 155
- Мінімум 20
- Міхалевич В. С. 17
- Многогранник 89
- опуклий 89
- Множина елементарних подій 171
- замкнена 27, 29–30
 - компактна 28–29
 - Лебега 29
 - обмежена 29
 - опукла 88–89
 - регулярна 263

Н

- Наближені методи одновимірної мінімізації 127
- Нелінійне програмування 6, 10, 17, 56, 142, 155, 172
- Необхідна умова локального екстремуму 64, 78, 81
- Непрямі методи стохастичного програмування 173
- Норма вектора 29
- Ньютон І. 12, 15, 17

О

- Обмеження активні 143
- ε -Окіл точки 29
- Оптимальний 9
- Оптимізація однокритеріальна 55
- Оптимізація багатокритеріальна 55
- Опукла лінійна комбінація точок 89
- Опукла множина 89
- Опукла функція 90

П

- Параметр керуючий 158
- Пауелл М. 94, 119
- Пігу А. 328
- Понтрягін Л.С. 17, 270
- Похідна функції в точці 61
- Принцип максимуму Понтрягіна 267, 270
 - оптимальності Беллмана 273, 278
- Простір арифметичний евклідовий 28
 - імовірнісний 194
- Прямі методи стохастичного програмування 173, 194

Р

- Рівняння Ейлера -Легранжа 15
- Ряд Тейлора 127, 130

С

- Сідлова точка функції Лагранжа 263
- Симплекс-метод 8, 16, 211, 214–215
- Система комп'ютерна математична 398
 - Maple 398–399
 - MathCad 398–403
 - Mathematica 398
 - Matlab 398
- Скалярний добуток 28
- Сміт Адам 334
- Стохастичне програмування 56, 170–173
- Стохастичний квазіградієнт 194

- метод скорочення нев'язок 194
- Строгий глобальний максимум 21
- глобальний мінімум 21
- глобальний максимум 21
- локальний мінімум 21

Т

- Табличний процесор MS Excel 405
- Таккер А. 17
- Темп приросту 74
- Теорія оптимального управління 270
- Теорема Вейерштрасса 28
 - двоїстості 229–230
 - Дебре 346
 - двоїстості 228
 - Куна-Таккера 263
 - основна матричних ігор 293
 - Ферма 64
- Точка глобального максимуму 21
 - глобального мінімуму 21
 - гранична множини 29
 - крайня (кутова) 89
 - критична 64
 - локального максимуму 21, 64
 - локального мінімуму 21, 64
 - підозріла на екстремум 64
 - сідлова 263, 288
 - стаціонарна 64
 - строгого локального максимуму 65
 - строгого локального мінімуму 65

У

- Умова адитивності цільової функції 278
 - відсутності наслідків 278
 - гарантованого виграшу 278
 - диференційовності 102
 - доповнюючої нежорсткості 230
 - досконалої конкуренції 335

- достатні 65, 82
- екстремуму 64–65, 78–79, 81–82
- зростання функції в точці 63
- зупинки 98
- існування розв'язків оптимізаційної задачі 27
- Ліпшиця 111, 112
- монополії 340
- невизначеності 379–380
- необхідні 64–65, 78–79, 81
- оптимальності 61
- опуклості 69
- регулярності 263
- ризику 170
- спадання функції в точці 63
- цілочисельності 237
- Управління оптимальне 270–273
 - ризиками 379

Ф

- Фалкерсон Д. Р. 16
- Ферма П. 12
- Форд Л. Р. 16
- Функція випуску 331
 - бар'ерна 155
 - виробнича 330
 - виробничих витрат 331
 - Гомперця 333
 - диференційовна в точці 62
 - диференційовна в точці 62
 - експоненціальна 333
 - зростаюча в точці 62
 - індикаторна 180
 - квадратична 333
 - корисності 346
 - кубічна 333
 - Лагранжа 263
 - Лаффера 333
 - лінійна 333

- логарифмічна 333
 - логістична 333
 - напівнеперервна зверху 30
 - напівнеперервна знизу 30
 - обернена 333
 - опукла (опукла донизу) 23, 69, 90
 - показникова 333
 - регресії 178
 - спадна в точці 62
 - степенева 333
 - строго унімодальна 63
 - угнута (опукла догори) 23, 90
 - унімодальна 63
 - цільова 20
 - штрафні 156
- Функціонал 57, 272

Ц

- Цільова функція 20
- Цілочисельне програмування 237

Ш

- Шор Н.З. 17
- Штраф 155–157

Я

- Якобі К. 15
- Яристість 156

Наукове видання

КЛОЧКО Оксана Віталіївна
КЛОЧКО Віталій Іванович
ПОТАПОВА Надія Анаталіївна

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕКОНОМІЦІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редактор *Космина Н.М.*
Коректор *Загородня Л.М.*
Комп'ютерна верстка *Псиков Г.А.*

Здано до складання 15.01.2013.
Підписано до друку 26.02.2013.
Формат 60 x 84 / 16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різнографічний.
Умов. друк. арк. 26,50. Зам. № 25-11.
Наклад 300 прим.

Оригінал-макет видавництва «Вінницька газета»
Свідоцтво сер. ДК № 3346 від 18.12.2008 р.

Друк ФОП «Тарнашинський О. В.»
Реєстраційне свідоцтво ВОГ № 377287 від 20.02.2007 р.