Сергій Бак, Галина Ковтонюк, Світлана Майданюк

ІСНУВАННЯ ЛОКАЛІЗОВАНИХ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ КЛЕЙНА-ҐОРДОНА ІЗ НАСИЧУВАНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Анотація. *В статті вивчається дискретне нелінійне рівняння Клейна-Ґордона, яке описує динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. За відповідних умов в таких рівняннях існують розв'язки у вигляді стоячих хвиль. За допомогою методу періодичних апроксимацій і варіаційної техніки технік встановлено умови існування локалізованих стоячих хвиль в таких рівняннях.*

Ключові слова: *дискретне рівняння Клейна-Ґордона, стоячі хвилі, локалізовані розв'язки, критичні точки, насичувані нелінійності.*

Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійні рівняння Шредінгера, дискретне рівняння Клейна-Ґордона.

Важливими класами розв'язків таких рівнянь є біжучі і стоячі хвиль. В статтях [1-3; 5-7; 9; 10] досліджено питання існування біжучих хвиль різних видів в рівняннях типу Клейна-Ґордона. В статтях [4; 12-16] досліджувалось питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера. Питання існування і стійкості стоячих хвиль для рівнянь типу Клейна-Ґордона вивчалося в працях [8; 11; 17; 18].

Метою цієї статті є встановлення умов існування стоячих хвиль в дискретному рівнянні Клейна-Ґордона із насичуваною нелінійністю.

Постановка задачі. Будемо вивчати дискретне нелінійне рівняння Клейна-Ґордона:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n + f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа. Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

У цій статті будемо вивчати рівняння (1) з так званими насичуваними нелінійностями $f(z)$, тобто на нескінченності $f(z)$ ростуть як $const \cdot |z|$. Зокрема, прикладами таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu |u|^p}{1+\mu |u|^p} u,\ \mu > 0, \nu > 0,\ p > 1, \tag{2}$$

та

$$f(u) = \chi \left(1 - \exp\left(-a|u|^p\right)\right)u,\ \chi > 0,\ a > 0,\ p > 0. \tag{3}$$

Будемо шукати розв'язки системи (1) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{4}$$

де $(u_n) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою. Підставляючи стоячу хвилю (4) в рівняння (1), одержуємо систему

$$(Lu)_n + \omega^2 u_n = f(u_n),\ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де $(Lu)_n = (\Delta u)_n - m^2 u_n$.

Будемо вивчати стоячі хвилі з амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n = 0. \tag{6}$$

Основний результат. Позначимо через $F(t)$ первісну функцію для функції $f(t)$. Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі умови:

(i) $f(t) = o(t),\ t \to 0;$

(ii) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l < \infty;$

(iii) $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f(t)t < f'(t)t^2,\ t \neq 0;$

(iv) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{2} f(t)t - F(t)\right) = \infty;$

або

(v) *функція* $g(t) = f(t) - lt$ *обмежена.*

Легко перевірити, що нелінійності (2) і (3) задовольняють умови $(i)-(iii)$. Крім того, (2) задовольняє (iv) при $1 < p \le 2$ та (v) при $p > 2$. Нелінійність (3) задовольняє (v) для всіх $p > 0$.

З системою (5) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(Lu + \omega^2 u, u\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(u_n),$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (6). Критичні точки цього функціоналу є локалізованими розв'язками системи (5).

За допомогою методу періодичних апроксимацій в поєднанні з варіаційною технікою із використанням многовиду Нехарі в статті [17] одержано такий результат:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iv)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді рівняння (5) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l^2$, *один з яких невід'ємний.*

У цій статті за допомогою методу періодичних апроксимацій в поєднанні з варіаційною технікою із використанням теореми про гірський перевал одержано такий результат:

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$ *та* (v). *І нехай* $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді рівняння (5) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l^2$, *один з яких невід'ємний.*

З теорем 1 і 2 випливає основний результат статті:

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$ *та* (iv) *або* (v). *І нехай* $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді рівняння (5) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l^2$, *один з яких невід'ємний.*

Наслідок. *Нехай* $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді рівняння (5) з нелінійностями (2) та (3) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l^2$, *один з яких невід'ємний.*

Таким чином, у цій статті встановлено умови існування локалізованих стоячих хвиль в дискретному рівнянні Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. Одержані результати поглиблюють результати, одержані в статті [17].

Список використаних джерел:

1. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.

2. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.

3. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry*. 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26.

4. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.

5. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst*. 2006. Vol. 16, № 1. P. 235-252.

6. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts*. 1998. Vol. 306. P. 1-108.

7. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.

8. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.

9. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327-345.

10. Kreiner C. F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the discrete sine–Gordon equation with nonlinear pair interaction. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*. 2009. Vol. 70, № 9. P. 3146–3158.

11. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.

12. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.

13. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

14. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.

15. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.

16. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.

17. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. 2021. Вип. 22. С. 5-19.

18. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика.* Том 39, № 2. 2021. С. 7-21.

EXISTENCE OF LOCALIZED STANDING WAVES IN THE DISCRETE KLEIN-GORDON EQUATION WITH SATURABLE NONLINEARITIES

Abstract. *The paper studies the discrete nonlinear Klein-Gordon equation, which describes the dynamics of an infinite chain of linearly coupled nonlinear oscillators. Under appropriate conditions, there exist solutions in the form of standing waves in such equations. Using the method of periodic approximations and variational techniques, the conditions for the existence of localized standing waves in such equations with saturable nonlinearities are established.*

Keywords: *discrete Klein-Gordon equation, standing waves, localized solutions, critical points, saturable nonlinearities.*